Suites exactes

Considérons une suite de groupes et de morphismes de groupes

$$\ldots \longrightarrow G_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} G_n \xrightarrow{f_n} G_{n+1} \longrightarrow \ldots$$

On dit que cette suite est *exacte en* G_n si l'image de f_{n-1} est égale au noyau de f_n. On dit que la suite est *exacte* si elle est exacte en chaque groupe de la suite.

L'exemple le plus important de suite exacte est celui des *suites exactes à trois termes* appelées aussi *suites exactes courtes*, qui sont les suites de la forme

$$1 \longrightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} Q \longrightarrow 1.$$

Une telle suite est exacte si et seulement si i est injectif, p est surjectif et $\mathrm{im}(i) = \ker(p)$. Dit autrement, cela veut dire que i identifie H au noyau de p, et que p s'identifie au morphisme de quotient. Les suites exactes courtes donnent donc un moyen compact d'écrire un groupe, un sous-groupe distingué et le quotient. Cette terminologie est beaucoup utilisée par exemple pour étudier le problème dit de l'*extension* : on dispose de deux groupes H et Q, et on cherche tous les groupes G qui possèdent un sous-groupe distingué isomorphe à H avec quotient G/H isomorphe à Q. Un tel groupe G est alors appelé une *extension de* Q *par* H, ce qui explique la terminologie.

Lorsqu'on se limite aux suites exactes à trois termes, l'avantage de présenter les quotients sous forme de suite exacte peut paraître discutable. La pratique, et l'intuition que l'on acquiert par la manipulation des suites exactes, montrent qu'en fait ce formalisme est extrêmement efficace même dans ce cas simple. Mais les suites exactes avec plus de termes apparaissent très naturellement en algèbre, et l'utilité du concept est alors encore plus visible. Le but des exercices qui suivent est de donner un exemple simple pour illustrer ce fait.

Exercice 1 Soit $1 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow G_n \longrightarrow 1$ une suite exacte de groupes finis. Montrez que le produit alterné des cardinaux n_i des groupes G_i, c'est-à-dire le produit $n_1 n_2^{-1} n_3 n_4 {-1} \ldots$ est égal à 1.

Soit $0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow E_n \longrightarrow 0$ une suite exacte d'espaces vectoriels de dimension finie sur un corps k (c'est-à-dire, une suite exacte des groupes commutatifs sous-jacents). Montrez que la somme alternée des dimensions $\dim_k(E_i)$ est égale à 0.

Exercice 2 Soit $\varphi(n)$ l'indicateur d'Euler de n, c'est-à-dire le nombre d'entiers $1 \le k \le n$ premiers avec n. On sait que si a et b sont premiers entre eux, on a $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. On va démontrer une généralisation de cette formule au cas où a et b ne sont pas nécessairement premiers entre eux. On note alors d leur pgcd et m leur ppcm.

(1) On considère la suite d'applications :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \xrightarrow{i} (\mathbb{Z}/ab\mathbb{Z})^* \xrightarrow{\Delta} (\mathbb{Z}/a\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^* \xrightarrow{p} (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^* \longrightarrow 1$$

avec $i(r) = 1 + mr$, $\Delta(s) = (s, s)$ et $p(t, u) = tu^{-1}$ où l'on s'est autorisé à désigner par une même lettre un élément et sa classe résiduelle, lorsque le modulo est clair d'après le contexte. Montrez qu'il s'agit d'une suite exacte de groupes finis.

(2) Déduire de la question précédente et de l'exercice précédent une formule pour $\varphi(ab)$.