Sous-groupes distingués de SL_n et GL_n

Soit k un corps (commutatif) et $n \geqslant 1$ un entier. On rappelle que l'on désigne par $\mathrm{PSL}_n(k)$ le quotient de $\mathrm{SL}_n(k)$ par son centre, le groupe des matrices d'homothétie $\lambda\,\mathrm{Id}$ avec $\lambda \in \mu_n(k)$ une racine n-ième de l'unité. Nous allons voir comment on peut déduire du théorème fondamental de simplicité, rappelé ci-dessous, la liste des sous-groupes distingués de $\mathrm{SL}_n(k)$ et $\mathrm{GL}_n(k)$.

Théorème. *Le groupe* $\mathrm{PSL}_n(k)$ *est simple, sauf si* $n = 2$, $k = \mathbb{F}_2$ *ou* $n = 2$, $k = \mathbb{F}_3$.

Ce théorème est démontré dans Perrin, chap. IV, th. 4.1. Parmi les notions importantes que nous allons utiliser figurent le *centre* $Z(G)$, ensemble des éléments de G qui commutent à tous les éléments, et le *groupe dérivé* noté G' ou $[G,G]$ ou encore $D(G)$, qui est le sous-groupe de G engendré par les commutateurs. Tous deux sont des sous-groupes distingués de G qui mesurent à quel point G est abélien (ou non). Plus précisément, le centre est abélien alors que dans le cas de G' c'est le quotient $G^{\mathrm{ab}} = G/G'$ qui est abélien ; on peut dire heuristiquement que plus $Z(G)$ et/ou G^{ab} sont « gros », plus le groupe G est abélien. On a le fait élémentaire suivant :

Exercice 1 (*Sous-groupes du centre, sur-groupes du groupe dérivé*)
Soit G un groupe, $Z(G)$ son centre et G' son groupe dérivé.

1. Montrez que tout sous-groupe de $Z(G)$ est distingué dans G.
2. Montrez que tout sur-groupe de G' (i.e. sous-groupe de G contenant G') est distingué dans G.

Nous allons montrer que pour les groupes $\mathrm{SL}_n(k)$ et $\mathrm{GL}_n(k)$, les sous-groupes du centre et les sur-groupes du groupe dérivé fournissent *tous* les sous-groupes distingués.

Exercice 2 (*Les sous-groupes distingués non triviaux de* $\mathrm{SL}_n(k)$ *sont les sous-groupes du centre*)

1. Soit G un groupe de centre Z et H un sous-groupe. On suppose que $G = G'$ et $G = HZ$. Montrez que $G = H$.
2. On pose maintenant $G = \mathrm{SL}_n(k)$ et on suppose qu'on n'est pas dans l'un des cas particuliers $n = 2$, $k = \mathbb{F}_2$ ou $n = 2$, $k = \mathbb{F}_3$. On rappelle que dans ce cas, on a $G = G'$ (Perrin, chap. IV, th. 3.1). Déduisez-en que tout sous-groupe distingué non trivial $H \lhd G$ est inclus dans le centre Z. (*Indication : considérez le sous-groupe HZ et utilisez la bijection entre sous-groupes distingués de G contenant Z et sous-groupes distingués de G/Z.*)

Dans les deux cas particuliers, le titre de l'exercice doit être assoupli mais il est encore vrai que les sous-groupes distingués non triviaux sont les sous-groupes du centre ou sur-groupes du groupe dérivé. Plus précisément, on peut démontrer (mais nous admettrons ici) les résultats suivants :

— Il existe un isomorphisme $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$. Le seul sous-groupe distingué non trivial est le groupe dérivé $G' = \mathfrak{A}_3$.

— Il existe un isomorphisme $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathbb{H}_8 \rtimes (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Les sous-groupes distingués non triviaux sont le centre égal à $\{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et le groupe dérivé isomorphe à $\mathbb{H}_8$.

Exercice 3 (*Les sous-groupes distingués non triviaux de* $\mathrm{GL}_n(k)$ *sont les sous-groupes du centre et les sur-groupes du groupe dérivé* $\mathrm{SL}_n(k)$)
On suppose qu'on n'est pas dans l'un des cas particuliers $n = 2$, $k = \mathbb{F}_2$ ou $n = 2$, $k = \mathbb{F}_3$ (voir remarque ci-dessous pour des commentaires sur ces cas). On note $G = \mathrm{GL}_n(k)$ et on considère un sous-groupe distingué non trivial $H \lhd G$.

1. Montrez que $H \cap \mathrm{SL}_n(k)$ est égal, soit à $\mathrm{SL}_n(k)$, soit à un sous-groupe $C \subset Z(\mathrm{SL}_n(k))$ qui est fini d'ordre d, avec $d|n$ et d inversible dans k. (*Indication : on rappelle que* $Z(\mathrm{SL}_n(k))$ *est isomorphe au groupe* $\mu_n(k)$ *des racines* n*-ièmes de l'unité de* k*, cf Perrin, chap. IV, th. 2.6.*)
2. On suppose que $H \cap \mathrm{SL}_n(k) = \mathrm{SL}_n(k)$ et on note M l'image de $\det : H \to k^\times$. Démontrez que
$$H = \det{}^{-1}(M) = \{g \in \mathrm{GL}_n(k),\ \det(g) \in M\}.$$
3. On suppose que $H \cap \mathrm{SL}_n(k) = C$ comme dans 1. On observe que la démonstration classique du fait que les éléments du centre de $\mathrm{GL}_n(k)$ sont les homothéties établit un résultat plus fort, à savoir que les éléments de $\mathrm{GL}_n(k)$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathrm{SL}_n(k)$ sont les homothéties (voir Perrin, chap. IV, th. 2.6). Ce résultat sera utilisé dans (c).
   (a) Soit $h \in H$ et $g \in G$. Démontrez qu'il existe $c \in C$ tel que $ghg^{-1} = ch$. (*Indication : regardez le déterminant de* $ghg^{-1}h^{-1}$.) Déduisez-en que $g^d hg^{-d} = h$.
   (b) Démontrez que toute transvection est une puissance d-ième. (*Indication : les matrices de transvection usuelles vérifient* $T_{i,j}(\lambda)T_{i,j}(\mu) = T_{i,j}(\lambda+\mu)$*, donc* $T_{i,j}(\lambda) = T_{i,j}(\lambda/d)^d$.)
   (c) Déduisez de (a) et (b) que h commute avec toutes les transvections donc avec $\mathrm{SL}_n(k)$ tout entier, puis que h est une homothétie. Ainsi $H \subset Z(\mathrm{GL}_n(k))$.

En résumé, les sous-groupes distingués de $\mathrm{GL}_n(k)$ se répartissent en deux familles, indicées par les sous-groupes $M \subset k^\times$:
— les sous-groupes $H_M := \det^{-1}(M) = \{g \in \mathrm{GL}_n(k),\ \det(g) \in M\}$, qui contiennent $\mathrm{SL}_n(k)$,
— les sous-groupes $H'_M := M \subset Z(\mathrm{GL}_n(k))$, inclus dans le centre.

Remarques. (1) Dans les deux cas particuliers laissés de côté, la situation est la suivante.
— On a $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$ dont le seul sous-groupe distingué non trivial est le groupe dérivé $G' = \mathfrak{A}_3$, comme on l'a vu.
— Le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ est un groupe d'ordre 48 qui possède exactement trois sous-groupes distingués non triviaux, qui forment la *suite dérivée* $G \supsetneq G' \supsetneq G'' \supsetneq G''' \supsetneq G'''' = 1$:
$$\big(G' = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)\big) \supset \big(G'' \simeq \mathbb{H}_8\big) \supset \big(G''' = Z(G) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\big)$$
où chaque groupe est le dérivé du précédent. On voit qu'à cause de G'', il n'est pas vrai que les sous-groupes du centre et les sur-groupes du groupe dérivé épuisent la liste des sous-groupes distingués non triviaux de $\mathrm{GL}_n(k)$. Le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ est le seul des groupes généraux linéaires $\mathrm{GL}_n(k)$ qui met en défaut cette règle.

(2) Vincent Beck me signale qu'un chapitre entier, avec plus de 50 exercices, est consacré aux groupes $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ et $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ dans le livre de Rached Mneimné intitulé *Éléments de géométrie, actions de groupes*, édité par Cassini. Je ne saurais trop inviter la lectrice à s'y plonger !