On dit qu'un groupe est d'exposant fini *s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que pour tout élément x de G, on a $x^k = 1$. Dans ce cas, on appelle* exposant de G *le plus petit tel entier.*

(1) *Montrer qu'un groupe d'exposant 2 est abélien.*

(2) *Donner un exemple de groupe d'exposant 3 non abélien.*

(1) On suppose que pour tout x dans G, on a $x^2 = 1$. Ceci veut dire que $x^{-1} = x$. Par ailleurs, pour x, y dans G on a $(xy)^2 = xyxy = 1$. En multipliant à gauche par $x^{-1} = x$ et à droite par $y^{-1} = y$, on trouve $yx = xy$, donc G est abélien.

(2) On applique une stratégie de base pour trouver des contre-exemples : on essaie de trouver le plus simple contre-exemple possible. Dans notre cas, on va chercher un contre-exemple parmi les groupes finis, de cardinal le plus petit possible. D'après le lemme de Cauchy, le groupe G doit être un 3-groupe, car si un nombre premier p divise l'ordre de G, alors il existe un élément x d'ordre p. Mais comme $x^3 = 1$, on trouve que $p = 3$.

Donc l'ordre de G est de la forme 3^n pour un certain n. Supposons que n est choisi minimal, c'est-à-dire qu'il existe un groupe d'ordre 3^n non abélien, mais tous les groupes d'ordre 3^{n-1} sont abéliens. Par une propriété classique des p-groupes, il existe dans G un sous-groupe distingué N d'ordre 3^{n-1}.

Posons $H = G/N$, c'est un groupe d'ordre 3 donc isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Comme G est d'exposant 3, n'importe quel antécédent d'un générateur de H est d'ordre 3 donc engendre un sous-groupe de G isomorphe à H. Ceci montre que la suite exacte

$$1 \to N \to G \to H \to 1$$

est scindée, ou dit autrement, que G est produit semi-direct de N par H. Ce produit semi-direct est décrit par un morphisme $H \to \mathrm{Aut}(N)$, et G est non abélien ssi ce morphisme est non trivial. Comme H n'a pas de sous-groupe non trivial, ce morphisme est non trivial ssi il est injectif.

Par ailleurs, d'après l'hypothèse faite sur G, le groupe N est d'exposant 3, et par choix de n il est abélien. Donc N est isomorphe à $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{n-1}$. Ainsi $\mathrm{Aut}(N) \simeq \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Il s'agit donc de trouver un sous-groupe d'ordre 3 dans $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Le plus petit n pour lequel c'est possible est $n = 3$, et un exemple de tel sous-groupe est le sous-groupe des matrices unipotentes de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec a appartenant à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Pour conclure, on pose $N = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ et $H = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. On appelle $\theta : H \to \mathrm{Aut}(N) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ le morphisme qui envoie a sur la matrice unipotente ci-dessus. Alors le produit semi-direct de N par H correspondant à θ est un groupe d'ordre 27, non abélien. On doit faire attention tout de même que, dans le raisonnement qui précède, rien ne montre que ce groupe est d'exposant 3. Il faut le vérifier, ce qui est un exercice facile de manipulation sur le produit semi-direct.

Une fois cette réponse trouvée, on peut regarder cet exemple droit dans les yeux et reconnaître un groupe connu qui s'est caché... On voit que la clef de l'exercice est donnée par les matrices unipotentes et qu'en fait le groupe qu'on a construit n'est autre que le groupe $U_3(\mathbb{F}_3)$ des matrices unipotentes triangulaires supérieures

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

à coefficients dans le corps à trois éléments $\mathbb{F}_3$. Notez que sur cette description, il est facile de voir que ce groupe est d'exposant 3.