

La droite projective

La droite projective complexe $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est un espace topologique qui possède de nombreuses structures supplémentaires. Ceci en fait un objet mathématique extrêmement important, situé au croisement de nombreuses branches des mathématiques, dédiées à l'étude de ces différentes structures. Nous donnerons quatre constructions et vérifierons, sous forme d'exercices, qu'elles donnent bien naissance au même objet, à homéomorphisme près.

a) La droite projective complexe $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est l'ensemble des droites vectorielles (i.e. des droites passant par l'origine) du \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C}^2 . Il y a une application surjective $\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ qui envoie un vecteur $x \neq 0$ sur la droite qu'il engendre. L'ensemble $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ est un ouvert de \mathbb{C}^2 , et on munit $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de la topologie quotient via π (voir exercice ci-dessous sur la topologie quotient).

b) La sphère euclidienne $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ est la sphère unité dans l'espace euclidien de dimension 3. Elle est munie de la métrique induite de celle de \mathbb{R}^3 , ce qui en fait un espace topologique.

c) Le compactifié d'Alexandroff de \mathbb{C} est l'ensemble $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ réunion de \mathbb{C} et d'un point qui n'est pas dans \mathbb{C} , qu'on appelle le *point à l'infini*. Sa topologie est celle dont les ouverts sont de deux types : soit les ouverts de \mathbb{C} , soit la réunion de ∞ et du complémentaire dans \mathbb{C} d'un compact de \mathbb{C} (voir exercice ci-dessous sur le compactifié d'Alexandroff).

d) L'espace X est l'espace topologique obtenu en recollant les deux ensembles $Y = Z = \mathbb{C}$ le long des ouverts $U = Y \setminus \{0\}$ et $V = Z \setminus \{0\}$, au moyen de l'homéomorphisme $\varphi : U \rightarrow V$ défini par $\varphi(x) = 1/x$. Précisément, X est le quotient de l'ensemble $Y \amalg Z$ par la relation d'équivalence telle que $y \sim z$ si et seulement si $y \in Y$, $z \in Z$ et $y = \varphi(z)$. Il est muni de la topologie quotient de celle de $Y \amalg Z$.

La présentation de la droite projective donnée dans a) relève de la géométrie projective (géométrie qui étudie les propriétés d'incidence), de la géométrie algébrique (géométrie qui étudie les variétés dont les fonctions locales sont des polynômes), ou de la géométrie complexe (géométrie qui étudie les variétés dont les fonctions locales sont holomorphes). La présentation donnée dans b) relève de la géométrie riemannienne (géométrie qui étudie les variétés munies d'une métrique). Les deux dernières présentations sont des constructions classiques en topologie. La présentation d) est typique du procédé de construction par *recollement* pour fabriquer des variétés (topologiques, différentiables, holomorphes, algébriques, ou autres).

Exercice 1 Soit X un espace topologique, Y un ensemble, et $f : X \rightarrow Y$ une application surjective. Montrez que la famille des parties $A \subset Y$ telles que $f^{-1}(A)$ est un ouvert de X définit une topologie sur Y . On appelle cette topologie la *topologie quotient de X (via f)*. Montrez que pour cette topologie, l'application $f : X \rightarrow Y$ vérifie la propriété suivante : pour tout espace topologique Z , une application $g : Y \rightarrow Z$ est continue si et seulement si $g \circ f : X \rightarrow Z$ est continue.

Corrigé. Il est facile de montrer qu'on a bien défini une topologie sur Y , et je laisse les détails. Maintenant, soit Z un espace topologique et $g : Y \rightarrow Z$ une application. Si g est continue, alors $g \circ f$ est continue. C'est la réciproque qui demande une démonstration. Supposons donc que $g \circ f$ est continue, on veut montrer que g l'est. Soit $W \subset Z$ un ouvert, il faut montrer que $V := g^{-1}(W)$ est ouvert. Par définition de la topologie sur Y , il est équivalent de montrer que $f^{-1}(V)$ est ouvert, ce qui est vrai puisque $f^{-1}(V) = (g \circ f)^{-1}(W)$ et $g \circ f$ est continue par hypothèse.

Exercice 2 Soit X un espace topologique séparé et localement compact. Le *compactifié d'Alexandroff* de X est l'ensemble égal à la réunion de X et d'un point qui n'est pas dans X , noté ∞ . Montrez que la famille de parties suivantes définit une topologie sur X : les ouverts de X (ce sont les ouverts de \widehat{X} ne contenant pas ∞), et la réunion de ∞ et du complémentaire d'un compact de X (ce sont les ouverts de \widehat{X} contenant ∞). Montrez que \widehat{X} est compact.

Corrigé. Il est facile de montrer qu'on a bien défini une topologie sur \widehat{X} , et je laisse les détails. Pour montrer que \widehat{X} est compact, il suffit de montrer qu'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue. Soit donc $\{U_i\}$ un recouvrement de \widehat{X} par des ouverts. Comme il s'agit d'un recouvrement, l'un de ces ouverts, disons U_{i_0} , contient ∞ . Le complémentaire de U_{i_0} est un compact K de X , il est donc recouvert par un nombre fini d'ouverts relatifs $U_{i_1} \cap K, \dots, U_{i_n} \cap K$, où les U_{i_k} sont extraits du recouvrement initial. Donc les U_{i_k} pour $0 \leq k \leq n$ recouvrent \widehat{X} .

Exercice 3 (*Lemme : une bijection qui échange des bases d'ouverts est un homéo.*) Soient X, Y des espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une bijection. Montrez que f est un homéomorphisme si et seulement si c'est une bijection et pour tout $x \in X$, il existe $\{U_i\}_{i \in I}$ une base de voisinages ouverts de x telle que $\{f(U_i)\}$ est une base de voisinages ouverts de $f(x)$.

Corrigé. Seule la partie *si* n'est pas évidente. Nous supposons donc que f est une bijection satisfaisant la propriété indiquée, et nous voulons vérifier que c'est un homéomorphisme. Les hypothèses étant symétriques en x et y , il suffit de démontrer que f est continue, ou ouverte, au choix (une application entre espaces topologiques est ouverte, par définition, si l'image d'un ouvert est un ouvert ; donc f est un homéomorphisme ssi f est continue et ouverte). Montrons que f est ouverte. Soit U un ouvert de X . Par hypothèse, tout $x \in U$ possède un voisinage ouvert U_x inclus dans U , et tel que $f(U_x)$ est ouvert. Il s'ensuit que $f(U) = \cup_{x \in U} f(U_x)$ est ouvert.

Dans les deux exercices qui suivent, on construit des applications $X \xrightarrow{a} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \xrightarrow{b} S^2 \xrightarrow{\sigma} \widehat{\mathbb{C}}$ et on montre que ce sont des homéomorphismes en utilisant le lemme ci-dessus, c'est-à-dire en montrant que ces applications échangent des bases de voisinages ouverts.

Exercice 4 Dans l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^3$, on considère la sphère unité S^2 et le plan équatorial \mathcal{P} . On appelle *projection stéréographique* notée $\sigma : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathcal{P}$ la projection depuis le pôle nord N , définie par $\sigma(M) = (NM) \cap \mathcal{P}$.

(1) Faites un dessin.

(2) On identifie E à $\mathbb{C} \oplus \mathbb{R}$, de sorte que le plan équatorial s'identifie à \mathbb{C} . On note $(z, t) \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{R}$ les coordonnées d'un point $M \in E$. Donnez l'expression de σ dans ces coordonnées.

(3) Montrez que σ est une bijection en donnant l'expression de σ^{-1} . On l'étend en une bijection de S^2 dans $\widehat{\mathbb{C}} = \mathcal{P} \cup \{\infty\}$, encore notée σ , en posant $\sigma(N) = \infty$.

Corrigé. (2) La coordonnée z de M est l'affixe complexe de la projection de M sur le plan \mathcal{P} , notée m . Notons O l'origine de l'espace, on voit que le point $M' = \sigma(M)$ est sur le plan contenant O , M et N . En particulier, en tant que point de \mathcal{P} il appartient à la demi-droite $[Om)$, donc son affixe est de la forme λz avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$. En appliquant le théorème de Thalès dans le triangle ONM' on trouve

$$\frac{t}{1} = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

donc $\lambda = \frac{1}{1-t}$. Finalement $\sigma(z, t) = \frac{z}{1-t}$.

(3) Notons z' l'affixe du point $M' \in \mathcal{P}$. Les mêmes considérations que précédemment dans le plan (OMN) montrent que $M = \sigma^{-1}(M')$ a des coordonnées de la forme $(\mu z', t)$ pour un certain $\mu \in \mathbb{R}^+$. On a les deux contraintes supplémentaires

- (i) $\mu^2 |z'|^2 + t^2 = 1$ car $M \in S^2$, et
- (ii) $\frac{\mu z'}{1-t} = z'$ car $\sigma(M) = M'$.

De (ii) on tire $\mu = 1 - t$. En remplaçant $t = 1 - \mu$ dans (i) on trouve

$$\mu^2 |z|^2 + \mu^2 - 2\mu = 0.$$

Le cas $\mu = 0$ correspond à $z' = 0$, et dans le cas $\mu \neq 0$ on trouve

$$\mu = \frac{2}{|z'|^2 + 1} \quad \text{et enfin} \quad \sigma^{-1}(z') = \left(\frac{2z'}{|z'|^2 + 1}, \frac{|z'|^2 - 1}{|z'|^2 + 1} \right).$$

Cette dernière expression est valable sans restriction sur z' , le traitement à part du cas $\mu = 0$ n'était que temporaire.

Exercice 5 On conserve les notations utilisées ci-dessus. Pour tout $v = (a, b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, on note $\pi(x) = (a : b)$ image dans la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, et on appelle a, b ses *coordonnées projectives*. (Ce ne sont pas des coordonnées au sens propre du terme, puisqu'elles ne sont définies qu'à multiplication près par un scalaire inversible $\lambda \in \mathbb{C}^*$.)

On définit $a : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ par $a|_Y$ qui envoie $y \in Y$ sur $(y : 1)$ et $a|_Z$ qui envoie $z \in Z$ sur $(1 : z)$. On définit $b : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow S^2$ par

$$b(u : v) = \left(\frac{2u\bar{v}}{|u|^2 + |v|^2}, \frac{|u|^2 - |v|^2}{|u|^2 + |v|^2} \right) \in S^2 \subset \mathbb{C} \oplus \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^3$$

(voir notations de l'exercice précédent).

(1) Vérifiez que a et b sont bien définies.

(2) On considère le point $0 \in \mathbb{C} = Z \subset X$ et ses voisinages $B(0, \epsilon) = \{z \in Z, |z| < \epsilon\} \subset X$, pour $\epsilon > 0$. Montrez que via a, b, σ , cette base d'ouverts s'envoie sur des bases de voisinages ouverts des points images :

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{a} & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \xrightarrow{b} & S^2 & \xrightarrow{\sigma} & \widehat{\mathbb{C}} \\ 0 \in Z & \mapsto & (1 : 0) & \mapsto & (z, t) = (0, 1) & \mapsto & \infty \end{array}$$

Les calculs étant similaires en les points autres que ∞ , on admettra que ceci démontre que a, b, σ sont des homéomorphismes, compte tenu du lemme (« une bijection qui échange des bases d'ouverts est un homéo »).

Corrigé. (1) Pour vérifier que a est bien définie il suffit de voir que l'application $\tilde{a} : Y \amalg Z \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ définie par $a|_Y$ et $a|_Z$, passe au quotient par la relation d'équivalence qui définit X (on dit que $a|_Y$ et $a|_Z$ *se recollent*). Rappelons-nous que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ on a $(\lambda a : \lambda b) = (a : b)$. Alors l'assertion à voir est claire, car si $y = \varphi(z) = 1/z$, on a

$$a|_Y(y) = (y : 1) = (1/z : 1) = (1 : z) = a|_Z(z) .$$

Pour b , il n'y a qu'à voir que l'image $b(u : v)$ est bien dans S^2 , ce qui est facile.

(2) On vérifie que l'image de la boule $B(0, \epsilon) \subset X$ est comme suit :

- dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, sur l'ensemble $\{(a : b), \epsilon|a| > |b|\}$,
 - dans S^2 , sur l'ensemble $\{(z, t) \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{R}, t > \frac{1-\epsilon^2}{1+\epsilon^2}\}$.
 - dans $\widehat{\mathbb{C}}$, sur le complémentaire de la boule fermée centrée en $0 \in \mathbb{C}$ de rayon $1/\epsilon$.
- Ce sont des bases de voisinages d'ouverts des points respectifs.