Le n de GL_n

Soient K un corps et m, n deux entiers. On suppose qu'on a un isomorphisme de groupes $\mathrm{GL}_n(K) \simeq \mathrm{GL}_m(K)$. A-t-on $m = n$?

Si $\mathrm{car}(K) \neq 2$, Éric Saias vous a montré qu'en effet, $\mathrm{GL}_n(K) \simeq \mathrm{GL}_m(K)$ implique $m = n$. Pour le voir, on considère les sous-groupes finis $G \subset \mathrm{GL}_n(K)$ qui sont d'exposant 2, c'est-à-dire tels que $M^2 = \mathrm{Id}$ pour tout $M \in G$. Un tel groupe est abélien. De plus toutes les matrices de G sont annulées par le polynôme à racines simples $X^2 - 1$, donc elles sont diagonalisables (cet argument échoue si $\mathrm{car}(K) = 2$). Comme G est abélien, ces matrices sont simultanément diagonalisables, et donc il existe un conjugué de G dont tous les éléments sont des matrices diagonales, avec des coefficients ± 1. Donc $|G| \leq 2^n$ et ce cardinal est atteint. Donc si $\mathrm{GL}_n(K) \simeq \mathrm{GL}_m(K)$, alors $2^n = 2^m$ et donc $n = m$.

La question reste posée si $\mathrm{car}(K) = 2$, et la réponse est encore positive, comme on va le voir dans l'exercice 5. Un regard rétrospectif sur les raisonnements faits permettra de voir qu'ils montrent en fait que $\mathrm{GL}_n(K)$ *détermine n, indépendamment de K*. Ainsi, si K et L sont deux corps et si $\mathrm{GL}_n(K) \simeq \mathrm{GL}_m(L)$, alors on a $m = n$.

Plus généralement, si K et L sont deux corps et $\mathrm{GL}_n(K) \simeq \mathrm{GL}_m(L)$, on peut se demander si on a $K \simeq L$, ou au moins $\mathrm{car}(K) = \mathrm{car}(L)$. Il est possible de montrer (nous ne le ferons pas ici : voir le recueil d'exercices en référence ci-dessous) que si $m = n \geq 2$, alors $\mathrm{car}(K) = \mathrm{car}(L)$. Il se trouve que c'est faux si $n = 1$, et nous nous contenterons de donner un contre-exemple (exercice 6), qui fait un exercice très intéressant par ailleurs.

Avant de passer aux choses sérieuses, donnons des références :

J. Fresnel, M. Matignon, *Algèbre et Géométrie, un recueil d'exercices*, École Mathématique et Informatique Bordeaux 1. Peut se commander auprès de l'E.M.I. de Bordeaux 1, prix 10 €. J'en ai un exemplaire et je peux scanner la page s'il y a des personnes intéressées.

J. Fresnel, *Algèbre des matrices*, Hermann. C'est l'exercice A.4.7.21.3.

$\therefore$ ——————————— $\therefore$

Définition 1 Soit G un groupe (pas nécessairement fini). On dit que c'est un *p-groupe* si et seulement si tout élément est d'ordre fini égal à une puissance de p.

Définition 2 Soit $G \subset \mathrm{GL}_n(K)$ un sous-groupe. On dit que G est *unipotent* si et seulement si tous ses éléments sont des matrices unipotentes, c'est-à-dire sommes de la matrice identité et d'une matrice nilpotente.

Exercice 3 Soient K un corps de caractéristique p et $T \subset \mathrm{GL}_n(K)$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale.

(1) Montrez que $M \in \mathrm{GL}_n(K)$ est d'ordre une puissance de p si et seulement si M est unipotente. (*Rappelez-vous qu'en caractéristique p,* $(M + N)^p = M^p + N^p \ldots$).

(2) Soit $H \subset \mathrm{GL}_n(K)$ un sous-groupe. Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) H est unipotent.

(ii) H est un p-sous-groupe.

(iii) H est conjugué à un sous-groupe de T.

(3) Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) H est unipotent maximal.

(ii) H est un p-sous-groupe maximal.

(iii) H est conjugué à T.

Définition 4 Soit G un groupe et H, K deux sous-groupes. On note $[H, K]$ le sous-groupe engendré par les commutateurs $hkh^{-1}k^{-1}$ avec $h \in H$, $k \in K$.

On appelle *suite centrale descendante de* G la suite C^iG définie par $C^1G = G$ et $C^{i+1}G = [G, C^iG]$. S'il existe i tel que $C^iG = \{1\}$, on dit que G est un groupe *nilpotent*, et on appelle *indice de nilpotence* le plus petit tel indice i.

Exercice 5 Mêmes notations que dans l'exercice précédent.

(1) Si H est un p-sous-groupe maximal, montrez que $C^nH = \{1\}$ et $C^{n-1}H \neq \{1\}$.

(2) Déduisez-en que si $\mathrm{GL}_n(K) \simeq \mathrm{GL}_m(K)$, alors $n = m$.

Dans le cas $m = n = 1$, voici le contre-exemple au fait que

$$\text{« } \mathrm{GL}_n(K) \simeq \mathrm{GL}_m(K) \Rightarrow \mathrm{car}(K) = \mathrm{car}(L) \text{ ».}$$

Exercice 6 Montrez que $\mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{GL}_1(\mathbb{F}_3(t))$, où $\mathbb{F}_3(t)$ est le corps des fractions rationnelles en une variable.

(*Indications : décrivez* $\mathbb{Q}^\times$ *et* $\mathbb{F}_3(t)^\times$ *en termes des irréductibles de* $\mathbb{Z}$ *et de* $\mathbb{F}_3[t]$*...*)