

Endomorphismes partiellement isométriques et norme

Leçons concernées :

Exemples d'applications des idéaux d'un anneau commutatif unitaire.

Anneaux principaux.

Sous-espaces stables d'un endom. d'un espace vectoriel de dim. finie. Applications.

Polynômes d'endomorphismes. Applications.

Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

Dualité en dimension finie.

∴

Soit E un espace vectoriel euclidien (de dimension finie n), de produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

On dit qu'un endomorphisme $u \in L(E)$ est *partiellement isométrique* (en abrégé PI) ssi $\|u(x)\| = \|x\|$, pour tout $x \in (\ker(u))^\perp$. On rappelle que cela équivaut à dire que $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$, pour tous $x, y \in (\ker(u))^\perp$, ou encore que u^*u est un projecteur orthogonal.

Enfin, on rappelle que si $s \in L(E)$ est un endomorphisme symétrique positif, il existe un unique endomorphisme symétrique positif r tel que $s = r^2$, appelé la racine carrée de s . Si $f \in L(E)$ est quelconque, on note $|f|$ la racine carrée de f^*f . C'est donc un endomorphisme symétrique positif. Nous allons montrer :

Théorème : Soit $f \in L(E)$.

(1) pour tout v PI on a $\text{tr}(vf) \leq \text{tr}(|f|)$.

(2) $N(f) = \text{tr}(|f|)$ est une norme sur $L(E)$ avec $N(f) = \text{tr}(f)$ si f est symétrique positif.

Lemme 1 : $\ker f = \ker |f|$.

Preuve : On montre d'abord que $\ker f = \ker f^*f$, pour cela seule \supset est à montrer. Or $f^*f x = 0$ implique $\|f x\|^2 = \langle f^*f x, x \rangle = 0$.

Ceci se réécrit $\ker f = \ker |f|^2$. On en déduit le lemme en appliquant cela à f et $|f|$, observant que $|f|$ a même module que f . \square

Lemme 2 : $\exists ! u \in L(E)$ qui soit PI avec $|f| = uf$, $(\ker(u))^\perp = \text{im}(f)$ et $u^*u f = f$.

Preuve : Sur $\text{im}(f)$ on définit u par $u(f(y)) = |f|(y)$. Ceci est légitime car d'après le lemme 1, si $f(y) = 0$ alors $|f|(y) = 0$. Sur $(\text{im}(f))^\perp$ on définit u par $u(x) = 0$. On a ainsi défini un endomorphisme u sur E , tel que $uf = |f|$ et $(\ker(u))^\perp = \text{im}(f)$, manifestement unique avec ces propriétés. Il reste à voir qu'il est PI et que $u^*u f = f$.

Sur $(\ker(u))^\perp = \text{im}(f)$, u est isométrique car pour $x = f(y)$ on a

$$\|ux\|^2 = \| |f|(y) \|^2 = \langle |f|(y), |f|(y) \rangle = \langle |f|^2(y), (y) \rangle = \langle f^*f(y), y \rangle = \|f(y)\|^2 = \|x\|^2$$

Alors u^*u est le projecteur orthogonal sur $(\ker(u))^\perp = \text{im}(f)$ et il en découle immédiatement que $u^*u f = f$. \square

Preuve du théorème : On utilisera le fait suivant noté $(*)$: si p est un projecteur orthogonal et f un endomorphisme symétrique positif, alors $\text{tr}(pf) \leq \text{tr}(f)$. Pour voir cela on choisit une

base orthonormale $\{e_i\}$ qui diagonalise p , de sorte que $p(e_i) = e_i$ sur $\text{im}(p)$ et $p(e_i) = 0$ sur $\text{ker}(p)$. Alors

$$\begin{aligned}\text{tr}(pf) &= \sum_{i=1}^n \langle pfe_i, e_i \rangle = \sum \langle fe_i, p^*e_i \rangle = \sum \langle fe_i, pe_i \rangle \\ &= \sum_{e_i \in \text{im}(p)} \langle fe_i, e_i \rangle \leq \sum_{e_i \in \text{im}(p)} + \sum_{e_i \in \text{ker}(p)} = \text{tr}(f)\end{aligned}$$

où l'inégalité provient du fait que f est positif.

On va montrer l'énoncé un peu plus fort : si f est symétrique positif, pour tous u, v PI on a $\text{tr}(uvf) \leq \text{tr}(f)$. Soit g la racine carrée de f et fixons une base orthonormée $\{e_i\}$. On a

$$\begin{aligned}\text{tr}(uvf) &= \sum_{i=1}^n \langle uvfe_i, e_i \rangle = \sum \langle g^2e_i, v^*u^*e_i \rangle = \sum \langle ge_i, gv^*u^*e_i \rangle \\ &\leq \sum \|ge_i\| \|gv^*u^*e_i\| \text{ par Cauchy-Schwarz} \\ &\leq \sqrt{\sum \|ge_i\|^2} \sqrt{\sum \|gv^*u^*e_i\|^2} \text{ par Cauchy-Schwarz encore.}\end{aligned}$$

Or d'une part

$$\sum \|ge_i\|^2 = \sum \langle ge_i, ge_i \rangle = \sum \langle g^2e_i, e_i \rangle = \text{tr}(g^2) = \text{tr}(f)$$

D'autre part,

$$\sum \|gv^*u^*e_i\|^2 = \sum \langle uvv^*u^*e_i, e_i \rangle = \text{tr}(uvv^*u^*) = \text{tr}((u^*u)vv^*) \stackrel{(*)}{\leq} \text{tr}(vv^*) = \text{tr}(v^*vf) \stackrel{(*)}{\leq} \text{tr}(f)$$

où les deux inégalités proviennent du fait (*) ci-dessus. Ceci conclut notre calcul, et permet de montrer (1).

Passons au point (2), i.e. à la vérification du fait qu'on a une norme.

D'abord $|f|$ est symétrique positif, donc diagonalisable à valeurs propres positives. Il s'ensuit que $N(f) = \text{tr}(|f|) \geq 0$ et aussi que si $N(f) = 0$ alors toutes ses valeurs propres sont nulles, donc $|f|$ qui est diagonalisable est nul, donc f aussi puisque $\text{ker } f = \text{ker } |f|$ (lemme 1).

Ensuite clairement $N(\lambda f) = |\lambda|N(f)$.

Enfin pour $f, g \in L(E)$ quelconques, par le lemme 2 on peut choisir u PI tel que $|f + g| = u(f + g)$. On a alors, utilisant le point (1),

$$N(f + g) = \text{tr}(uf) + \text{tr}(ug) \leq \text{tr}(|f|) + \text{tr}(|g|) = N(f) + N(g)$$

Le théorème est prouvé. □

Bibliographie

[Gug] GUGGER, Problèmes corrigés de mathématiques posés au concours de Polytechnique, Tome 6, *Ellipses*.