UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Théorie des Groupes et Géométrie

Feuille n°4

Exercice 4 (Incidences)

Soit P un plan projectif. Soient D une droite et m un point de P hors de D. Soit m' la droite duale, c'est-à-dire l'ensemble des droites passant par m. On définit l'application d'incidence

$$i : m' \longrightarrow D$$

en associant, à toute droite passant par m, son point d'intersection avec D. Montrer que i est une homographie.

Correction. On écrit $P = \mathbb{P}(E)$, $D = \mathbb{P}(F)$, $m = \mathbb{P}(G)$ où E est un espace vectoriel de dimension 3, $F \subset E$ est un 2-plan et $G \subset E$ est une droite. La « droite duale » m' est l'ensemble des droites projectives passant par m ; ce sont des droites de la forme $\Delta = \mathbb{P}(F_1)$ avec F_1 un 2-plan contenant G. L'ensemble de ces droites est en bijection avec les droites vectorielles de l'espace vectoriel de E/G. En d'autres termes $m' = \mathbb{P}(E/G)$.

L'hypothèse $m \notin D$ signifie que $G \not\subset F$, donc $E = F \oplus G$. La projection $\pi : E = F \oplus G \to F$ a pour noyau G donc elle induit un isomorphisme $u : E/G \to F$. Vérifions que l'application induite $\mathbb{P}(u) : \mathbb{P}(E/G) \to \mathbb{P}(F)$ est égale à l'application $i : m' \to D$. Pour cela, soit un élément $m' = \mathbb{P}(E/G)$, c'est-à-dire une droite $\Delta = \mathbb{P}(F_1)$. L'image $\mathbb{P}(u)(\Delta)$ est la droite de F engendrée par l'image $u(\bar{f_1})$ de n'importe quel générateur $\bar{f_1}$ de la droite $F_1/G \subset E/G$. Si on choisit un élément $f_1 \in F_1$ qui relève $\bar{f_1}$, celui-ci s'écrit $f_1 = f + g$ sur la décomposition $E = F \oplus G$, si bien que $u(\bar{f_1}) = \pi(f_1) = f = f_1 - g \in F \cap F_1$ (on utilise ici le fait que $G \subset F_1$ pour dire que $f_1 - g \in F_1$). Ceci montre que $u(\bar{f_1})$ dirige la droite $F_1 \cap F$, donc $\mathbb{P}(u)(\Delta) = \mathbb{P}(F_1 \cap F) = \mathbb{P}(F_1) \cap \mathbb{P}(F) = \Delta \cap D = i(\Delta)$.

Voici cet exercice et sa correction, dans le livre Géométrie *de Michèle Audin :*

***Exercice VI.13* (Incidences).** Soit P un plan projectif. Soient D une droite et m un point de P hors de D. Soit $m^\star \subset P^\star$ la droite duale, c'est-à-dire l'ensemble des droites passant par m (voir le § VI.4 et l'exercice VI.12). On définit l'*application d'incidence*

$$i : m^\star \longrightarrow D$$

en associant, à toute droite passant par m, son point d'intersection avec D. Montrer que i est une homographie.

Exercice VI.13. On choisit une base (e_1, e_2, e_3) de l'espace vectoriel E définissant P de façon que $m = p(e_1)$ et $D = P(\langle e_2, e_3\rangle)$. La droite $m^\star$ est l'image dans $P(E^\star)$ du plan vectoriel $\langle e_2^\star, e_3^\star\rangle$ (formes linéaires s'annulant sur e_1).

Le plan vectoriel de E d'équation $(ae_2^\star + be_3^\star)(u) = 0$ rencontre le plan $\langle e_2, e_3\rangle$ le long de la droite vectorielle engendrée par $(b, -a)$. L'incidence est donc l'homographie associée à l'isomorphisme linéaire

$$\begin{array}{ccc} \langle e_2^\star, e_3^\star\rangle & \longrightarrow & \langle e_2, e_3\rangle \\ (a, b) & \longmapsto & (b, -a). \end{array}$$

⚠ Le terme de *droite duale* utilisé ici pour désigner $m^\star$ est un peu trompeur, car il ne s'agit *pas* du sous-espace projectif dual $m' \subset P' = \mathbb{P}(E')$ au sens de la dualité projective. Il vaudrait mieux parler du *faisceau des droites passant par m* comme dans l'exercice VI.12 du livre de M. Audin.

Exercice 7 (Décomposition de Choleski et décomposition QR)

Dans cet exercice on étudie deux décompositions matricielles classiques qui sont des conséquences du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. On note $\mathrm{SDP}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives et $T_n^+(\mathbb{R})$ le groupe des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs.

1. (Décomposition de Choleski) En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, démontrez que pour toute matrice $A \in \mathrm{SDP}_n(\mathbb{R})$ il existe une unique matrice $T \in T_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^{\mathrm{t}}TT$.

Correction. Existence. *Comme A est symétrique définie positive, elle définit un produit scalaire $\langle X, Y\rangle := {}^tXAY$. Notons $\mathscr{B} = (e_i)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Le procédé de Gram-Schmidt fournit une base orthonormale $\mathscr{B}' = (\epsilon_i)$ de telle manière que la matrice de passage $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ est triangulaire supérieure à coefficients > 0. La matrice du produit scalaire dans la base $\mathscr{B}'$ est ${}^tUAU$, et cette matrice n'est autre que l'identité : c'est ce que signifie de dire que $\mathscr{B}'$ est orthonormale. Posant $T = U^{-1}$, on obtient $A = {}^tTT$.*

Unicité. *Supposons que $A = {}^tT_1T_1 = {}^tT_2T_2$ pour deux matrices $T_1, T_2 \in T_n^+(\mathbb{R})$. Alors ${}^t(T_1T_2^{-1}) = T_2T_1^{-1}$. La matrice de gauche est triangulaire inférieure ; celle de droite est triangulaire supérieure ; leur égalité impose donc que ce soit une matrice diagonale D, à coefficients > 0. En remplaçant $T_2 = DT_1$ dans l'égalité ${}^tT_1T_1 = {}^tT_2T_2$ on trouve $D^2 = \mathrm{I}_n$, et comme D est à coefficients > 0 finalement $D = \mathrm{I}_n$ donc $T_1 = T_2$.*

2. (Décomposition QR) En utilisant la décomposition de Choleski, démontrez que pour toute matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times T_n^+(\mathbb{R})$ tel que $M = QR$.

Correction. Existence. *La matrice ${}^tMM$ est symétrique définie positive (définie puisque M est inversible), donc elle possède une décomposition de Choleski ${}^tMM = {}^tRR$ avec $R \in T_n^+(\mathbb{R})$. Posons $Q := MR^{-1}$, on a ${}^tQQ = {}^tR^{-1}{}^tMMR^{-1} = {}^tR^{-1}{}^tRRR^{-1} = \mathrm{I}_n$ donc $Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.*

Unicité. *Elle résulte de l'unicité de R, garantie par l'unicité dans la décomposition de Choleski.*

Remarque 1. *La décomposition QR peut aussi s'obtenir directement à partir du procédé de Gram-Schmidt, appliqué avec le produit scalaire canonique $(X, Y) := {}^tXY$ (et non pas celui fourni par ${}^tMM$). Voici comment. Notons f_i les vecteurs colonnes de M^{-1}. Alors $M^{-1} = \mathrm{Mat}_{e_i}(f_i)$ donc $M = \mathrm{Mat}_{f_i}(e_i)$. Notons (ϵ_i) l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base (f_i). La matrice de passage $Q := \mathrm{Mat}_{\epsilon_i}(e_i)$ est orthogonale (matrice de passage d'une base orthonormale dans une autre) et la matrice de passage $R := \mathrm{Mat}_{f_i}(\epsilon_i)$ est dans $T_n^+(\mathbb{R})$ par propriété de l'algorithme de Gram-Schmidt. Enfin la formule de transitivité pour les matrices de passage fournit :*

$$M = \mathrm{Mat}_{f_i}(e_i) = \mathrm{Mat}_{\epsilon_i}(e_i)\mathrm{Mat}_{f_i}(\epsilon_i) = QR.$$

Remarque 2. *On peut montrer que les applications suivantes sont des homéomorphismes :*

$$T_n^+(\mathbb{R}) \to \mathrm{SDP}_n(\mathbb{R}),\ T \mapsto {}^{\mathrm{t}}TT \quad \textit{et} \quad \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times T_n^+(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ (Q, R) \mapsto QR.$$

3. (Inégalité de Hadamard) Démontrez que pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ on a $|\det(A)| \leq \prod_{j=1}^n \|C_j\|$ où $\|C_j\|$ désigne la norme euclidienne de la j-ième colonne de A. (*Indication : considérer la décomposition de Choleski de $B := {}^{\mathrm{t}}AA$ et en particulier les coefficients diagonaux de B.*)

Correction. Si A n'est pas inversible, on a $\det(A) = 0$ donc l'inégalité est vérifiée. Sinon, la matrice ${}^{\mathrm{t}}AA$ est symétrique définie positive donc possède une décomposition de Choleski ${}^{\mathrm{t}}AA = {}^{\mathrm{t}}TT$ avec $T \in T_n^+(\mathbb{R})$. Notons $C_j = (a_{ij})_i$ et $D_j = (t_{ij})_i$ les j-ièmes colonnes de A et T. Le j-ième coefficient diagonal de ${}^tAA$ est égal à ${}^tC_jC_j = \|C_j\|^2$ et de même pour celui de T. L'égalité ${}^{\mathrm{t}}AA = {}^{\mathrm{t}}TT$ fournit donc :

- $\|C_j\|^2 = \|D_j\|^2 = \sum_i |t_{ij}|^2 \geq |t_{jj}|^2$,
- $\det(A)^2 = \det(T)^2 = \prod_j |t_{jj}|^2 \leq \prod_j \|C_j\|^2$ *d'après le point précédent.*

L'inégalité de Hadamard s'obtient en prenant les racines carrées.