UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Théorie des Groupes et Géométrie

Feuille n°4

Espaces projectifs, sous-espaces projectifs

Exercice 1 (Sous-espace projectif engendré par une partie)

Soit $(W_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de V.

1. Vérifier que $\mathbb{P}(\cap_i W_i) = \cap_i \mathbb{P}(W_i)$. En déduire la définition du sous-espace projectif de $\mathbb{P}(V)$ engendré par une partie.

2. Quel est le sous-espace projectif engendré par la réunion des $\mathbb{P}(W_i)$?

Exercice 2 (Intersections de sous-espaces projectifs)

Démontrez les assertions suivantes concernant les sous-espaces projectifs d'un espace projectif fixé.

1. Par deux points distincts d'un espace projectif passe une unique droite projective.

2. Deux droites projectives sont sécantes si et seulement si elles sont contenues dans un même plan projectif. Dans ce cas, leur intersection est un singleton si et seulement si elles sont distinctes.

3. Par deux droites projectives sécantes et distinctes passe un unique plan projectif.

4. Un hyperplan projectif et une droite projective sont toujours sécants. L'intersection est un singleton si et seulement si la droite n'est pas incluse dans l'hyperplan.

Exercice 3 (L'espace projectif des hyperplans)

Soit V un espace vectoriel de dimension finie.

1. Démontrez qu'une partie H de $\mathbb{P}(V)$ est un hyperplan projectif si et seulement s'il existe une forme linéaire non nulle $\varphi \in V^*$ telle que $H = \{d \in \mathbb{P}(V);\ \varphi(d) = 0\}$. Une telle φ est appelée une *équation* de H.

2. Démontrez que l'application qui à un hyperplan projectif H associe l'ensemble de ses équations induit une bijection de l'ensemble des hyperplans projectifs de V sur l'espace projectif $\mathbb{P}(V^*)$.
(*Ainsi l'ensemble des hyperplans projectifs de V « est » lui-même un espace projectif.*)

Exercice 4 (Incidences)

Soit P un plan projectif. Soient D une droite et m un point de P hors de D. Soit $m' \subset P'$ la droite duale, c'est-à-dire l'ensemble des droites passant par m. On définit l'application d'incidence

$$i : m' \longrightarrow D$$

en associant, à toute droite passant par m, son point d'intersection avec D. Montrer que i est une homographie.

Groupes orthogonaux

Exercice 5 (Actions de SO sur la sphère et l'espace projectif)

1. Montrez que l'action de $\mathrm{SO}_{n+1}(\mathbb{R})$ sur la sphère euclidienne S^n de $\mathbb{R}^{n+1}$ est transitive. Décrivez le stabilisateur d'un vecteur $x \in S^n$; est-il connexe ?

2. Montrez que l'action de $\mathrm{SO}_{n+1}(\mathbb{R})$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est transitive. Décrivez le stabilisateur d'un point $x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$; est-il connexe ?

Exercice 6 (Sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$)

Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On note $(-,-)$ le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$ et pour toute paire de vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$ on pose $\langle x, y\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(gx, gy)$.

1. Démontrez que $\langle -,-\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

2. Démontrez que $\langle -,-\rangle$ est G-invariant, au sens où $\langle gx, gy\rangle = \langle x, y\rangle$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $g \in G$.

3. Déduisez-en que G est inclus dans un conjugué de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Remarque : si G est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, une variante de cette méthode, utilisant l'intégration pour la *mesure de Haar* de G au lieu de la sommation $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}$ permet de montrer que G est inclus dans un conjugué de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7 (Décomposition de Choleski et décomposition QR)

Dans cet exercice on étudie deux décompositions matricielles classiques qui sont des conséquences du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. On note $\mathrm{SDP}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives et $T_n^+(\mathbb{R})$ le groupe des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs.

1. (Décomposition de Choleski) En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, démontrez que pour toute matrice $A \in \mathrm{SDP}_n(\mathbb{R})$ il existe une unique matrice $T \in T_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^{\mathrm{t}}TT$.

2. (Décomposition QR) En utilisant la décomposition de Choleski, démontrez que pour toute matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times T_n^+(\mathbb{R})$ tel que $M = QR$.

Remarque : on peut montrer que les applications suivantes sont des homéomorphismes :

$$T_n^+(\mathbb{R}) \to \mathrm{SDP}_n(\mathbb{R}),\ T \mapsto {}^{\mathrm{t}}TT \quad \text{et} \quad \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times T_n^+(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ (Q, R) \mapsto QR.$$

3. (Inégalité de Hadamard) Démontrez que pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ on a $|\det(A)| \leq \prod_{j=1}^n ||C_j||$ où $||C_j||$ désigne la norme euclidienne de la j-ième colonne de A. (*Indication : considérer la décomposition de Choleski de $B := {}^{\mathrm{t}}AA$ et en particulier les coefficients diagonaux de B.*)

Exercice 8 (Sous-groupes finis de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, voir M. Audin, *Géométrie*, EDP Sciences, 2006, Exercice V.54)

Soit G un sous-groupe d'ordre $n > 1$ de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Il agit sur la sphère unité S de $\mathbb{R}^3$. On considère l'ensemble

$$\Gamma = \{(g, x) \in (G \setminus \{\mathrm{Id}\}) \times S;\ g(x) = x\}$$

avec ses deux projections sur S et $G \setminus \{\mathrm{Id}\}$. Soit X son image dans S.

1. Caractériser géométriquement les éléments de X et vérifier que G stabilise X. On appelle $P_1, \ldots, P_k$ les orbites de cette opération et e_i l'ordre du stabilisateur de x quand $x \in P_i$. Combien y a-t-il de rotations dans G qui ont le vecteur x de P_i comme point fixe ? En calculant le cardinal de Γ de deux façons différentes, montrer que

$$2(n-1) = n\sum_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{e_i}\right).$$

2. En déduire que $k = 2$ ou 3. Montrer que, si $k = 2$, G est un groupe cyclique d'ordre n.

3. On suppose maintenant que $k = 3$. Montrer que, à l'ordre près des e_i, le uplet (n, e_1, e_2, e_3) est de la forme

$$(2p, 2, 2, p) \quad \text{ou} \quad (12, 2, 3, 3) \quad \text{ou} \quad (24, 2, 3, 4) \quad \text{ou} \quad (60, 2, 3, 5).$$

4. On suppose que $(n, e_1, e_2, e_3) = (2p, 2, 2, p)$. Montrer que le stabilisateur des points de l'orbite P_3 est un groupe cyclique d'ordre p. En déduire que G est le groupe de tous les déplacements qui préservent un polygone plan régulier à p côtés et que c'est un groupe diédral $\mathbb{D}_p$ d'ordre $2p$.

5. On suppose que $(n, e_1, e_2, e_3) = (12, 2, 3, 3)$. Combien l'orbite P_2 a-t-elle d'éléments ? Montrer que ces points forment un tétraèdre régulier. Conclure que G est le groupe des déplacements qui préservent un tétraèdre régulier. Que peut-on dire de l'orbite P_3 ?

6. On suppose que $(n, e_1, e_2, e_3) = (24, 2, 3, 4)$. Montrer de même que les points de P_2 forment un cube et que G est le groupe des déplacements qui préservent ce cube. Quelle est la figure formée par les points de l'orbite P_3 ?

7. On suppose que $(n, e_1, e_2, e_3) = (60, 2, 3, 5)$. Montrer que les points de l'orbite P_2 sont les sommets d'un dodécaèdre régulier (c'est nettement plus délicat ici) et que G est le groupe des déplacements qui préservent ce polyèdre. Que peut-on dire des points de l'orbite P_3 ?