Théorie des Groupes et Géométrie

TD n°3 : Géométrie affine, géométrie projective

Exemples d'espaces affines

Exercice 1 (Ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire avec second membre)

Montrez que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + y = x$, où l'inconnue est une fonction dérivable $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, est un $\mathbb{R}$-espace affine $\mathcal{E}$. Précisez sa direction E et sa dimension n.

Exercice 2 (Supplémentaires d'un sous-espace vectoriel)

Soient E un espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Le but de l'exercice est de montrer que l'ensemble $\mathscr{S}$ des supplémentaires de F dans E est muni d'une structure d'espace affine de direction $S = \mathscr{L}(E/F, F)$.

1. On note $\pi : E \to E/F$ la projection canonique et $\mathscr{S}'$ l'ensemble des *sections* de π, c'est-à-dire les applications linéaires $s : E/F \to E$ telles que $\pi \circ s = \mathrm{Id}_{E/F}$. Construisez une bijection $\mathscr{S} \xrightarrow{\sim} \mathscr{S}'$:
   (a) Si $G \overset{i}{\hookrightarrow} E$ est un supplémentaire de F, montrez que $\pi_{|G}$ est un isomorphisme et $s := i \circ \pi_{|G}^{-1}$ une section de π ;
   (b) Si s est une section de π, montrez que $G = \mathrm{im}(s)$ est un supplémentaire de F.

On est ramené à montrer que $\mathscr{S}'$ est muni d'une structure d'espace affine.

2. Montrez que le noyau de l'application $\Phi : \mathscr{L}(E/F, E) \to \mathscr{L}(E/F, E/F)$, $s \mapsto \pi \circ s$ est égal à $S = \mathscr{L}(E/F, F)$.
3. Montrez que $\mathscr{S}' = \Phi^{-1}(\mathrm{Id})$ et déduisez-en que $\mathscr{S}'$ est muni d'une structure d'espace affine de direction S.

Exercice 3 (Applications affines)

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines de directions respectives E et F.

1. Montrez que l'ensemble des applications affines $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, F)$ est un espace vectoriel de manière naturelle.
2. Montrez que l'ensemble des applications affines $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ est un espace affine de direction $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, F)$.

Géométrie affine

Exercice 4 (Repères affines)

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et soit $n := \dim \mathcal{E}$. On dit que $A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{E}$ forment un *repère affine* de $\mathcal{E}$ si la famille $(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est une base de E.

1. On suppose dans cette question uniquement que $n = 2$. Montrer que $A_0, A_1, A_2 \in \mathcal{E}$ forment un repère affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si A_0, A_1, A_2 ne sont pas alignés.
2. Montrer que si une application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ vérifie $f(A_i) = A_i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$ alors $f = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$.

Exercice 5 (Groupe des homothéties et translations)

Montrer que l'ensemble des homothéties et des translations de $\mathcal{E}$ forme un groupe.
(*Attention, il s'agit ici d'homothéties affines alors que l'exercice 11 de la feuille 2 utilisait des homothéties linéaires.*)

Exercice 6 (Centre du groupe affine)

Dans cet exercice on étudie le centre du groupe affine d'un espace affine de dimension $n > 0$ sur un corps k. En choisissant un point de l'espace puis une base de sa direction, on se ramène immédiatement à l'étude du groupe affine $G := \mathrm{GA}(E)$ de l'espace vectoriel $E = k^n$. On note Z son centre.

1. Soit $f \in Z$ écrite sous la forme $f(x) = Ax + b$. Démontrez que A est une matrice d'homothétie puis que le rapport de cette homothétie est égal à 1.
2. On suppose que $k \not\simeq \mathbb{F}_2$. Démontrez que $f = \mathrm{Id}$.
3. On suppose que $k = \mathbb{F}_2$ et $n > 1$. Montrez que le polynôme $P = X^n + X + 1$ est sans racine dans $\mathbb{F}_2$ et déduisez-en que $f = \mathrm{Id}$. (*Indication : on pourra utiliser une matrice de polynôme caractéristique P.*)
4. On suppose que $k = \mathbb{F}_2$ et $n = 1$. Déterminez Z.

Exercice 7 (Un problème de construction)

On travaille dans un plan affine réel $\mathcal{E}$. La règle utilisée dans les différentes questions est *non graduée*. Les questions 4 et 5 peuvent être traitées en admettant le résultat des questions 1 à 3.

1. Soient D une droite et M un point. Décrivez avec les mots du lycée un procédé de construction à la règle et au compas de la droite parallèle à D passant par M.
2. Soient A et B deux points de $\mathcal{E}$ et $n \geqslant 2$ un entier. Démontrez avec les mots du master de Mathématiques qu'il existe un unique $(n+1)$-uplet de points $(M_0, \ldots, M_n)$ tels que $M_0 = A$, $M_n = B$ et $\overrightarrow{M_{i-1}M_i} = \frac{1}{n}\overrightarrow{AB}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.
3. Un tel uplet est appelé *découpage de $\{A, B\}$ en n parties égales*. Décrivez un procédé de construction à la règle et au compas d'un tel découpage basé sur le théorème de Thalès.

Lorsque $n = 2$, le découpage est de la forme (A, M_1, B) et on note $\mathrm{m}(A, B) := M_1$ le *milieu* de $\{A, B\}$. On se donne maintenant un triangle ABC. On souhaite construire trois points A', B', C' tels que $A' = \mathrm{m}(B', C)$, $B' = \mathrm{m}(C', A)$ et $C' = \mathrm{m}(A', B)$.

4. *Analyse.*
   (a) Dessinez un triangle $A'B'C'$ puis un triangle ABC de telle sorte que les conditions décrites ci-dessus soient remplies.
   (b) On note $h(O, \lambda)$ l'homothétie de centre O et de rapport λ. Soit f la transformation affine $h(A, 1/2) \circ h(B, 1/2) \circ h(C, 1/2)$. Montrez que l'un des points de la figure est fixe pour f.
   (c) Quel est la linéarisée de f ? Quelle est l'application f ?
   (d) Soit I le point défini par $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{CB}$. Indiquez quelle est l'image de I par f.
5. *Synthèse.* On revient au triangle ABC initial. Déduisez de l'analyse précédente un procédé de construction à la règle et au compas du triangle $A'B'C'$.

Exercice 8 (Sous-espaces parallèles)

1. Montrer que dans un espace affine $\mathcal{E}$, deux sous-espaces parallèles sont disjoints ou égaux.
2. Montrer que si $\dim \mathcal{E} = 2$ alors deux droites affines disjointes sont parallèles.
3. Donner un exemple de deux droites de $\mathbb{R}^3$ disjointes et non parallèles.

Exercice 9 (Images et images réciproques de sous-espaces)

1. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ une application affine. Montrer que l'image d'un sous-espace affine $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est un sous-espace affine. Montrer que l'image réciproque d'un sous-espace affine $\mathcal{F}' \subset \mathcal{E}'$ est soit vide, soit un sous-espace affine.
2. Montrer qu'une application affine envoie 3 points alignés sur 3 points alignés.

Espace projectif

Exercice 10 (Points et droites de l'espace projectif)

1. Déterminer le nombre de points de $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$.
2. On suppose $n \geqslant 1$. Déterminer le nombre de droites de $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ (on pourra utiliser une action transitive bien choisie).
3. Représenter les éléments de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ et tracer les droites. On parle du *plan de Fano*.
4. Le Dobble est un jeu constitué de 55 cartes, chacune d'entre elles comportant huit symboles différents. Chaque carte a un unique symbole en commun avec chacune autre, le but du jeu est d'être le premier à trouver le symbole commun entre deux cartes données.

   (a) Voici deux cartes de Dobble. Quel est leur symbole commun ?

   (b) Expliquer comment construire un jeu de Dobble.

Exercice 11 (Droite projective réelle)

Démontrez que $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est homéomorphe à la sphère unité $\mathbb{S}^1$ de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 12 (Un peu de topologie)

Soit k un corps et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrez que l'on a une bijection $\mathbb{P}^n(k) \simeq k^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1}(k)$.
2. Dans cette union disjointe, que représente $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ pour $\mathbb{P}^n(k)$?

On suppose maintenant que $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3. Démontrez que $\mathbb{P}^n(k)$ hérite sa topologie de la sphère unité $\mathbb{S}^n$ de k^{n+1}.
4. Montrez que ses espaces sont compacts et connexes par arcs.
5. Montrez que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est homéomorphe à la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$.
6. Montrez que $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ privé d'une droite est homéomorphe à un disque ouvert.

Envoi à l'infini

Exercice 13 (Un peu de dessin)

Soit Δ un triangle d'un plan projectif réel. Représenter Δ après avoir envoyé à l'infini :

1. seulement un sommet ;
2. un côté ;
3. une droite rencontrant l'intérieur de Δ.

Soit Q un quadrilatère d'un plan projectif réel. Représenter Q après avoir envoyé à l'infini :

4. seulement un sommet ;
5. seulement un côté ;
6. seulement une diagonale.

Exercice 14 (Théorème de Desargues)

Soit abc et $a'b'c'$ deux triangles. Soient u, v, w les points d'intersection des droites bc et $b'c'$, ca et $c'a'$, ab et $a'b'$.

1. Faire un dessin.
2. Montrer que les points u, v, w sont alignés si et seulement si les droites aa', bb' et cc' sont concourantes.

Exercice 15

Soit d_0, d_1, d, d' 4 droites concourantes en un point m. Soit $o \neq m$ un point de d_1. Soient $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ deux droites concourantes en o (et distincts de d_1). On note $A_i = \mathcal{D}_i \cap d$ et $A_i' = \mathcal{D}_i \cap d'$. En envoyant une droite à l'infini et en utilisant le birapport, redémontrer le théorème de Thalès.

Homographies

Exercice 16 (Repère projectif d'une droite)

Soit E un k-espace vectoriel et soit $f \in \mathrm{GL}(E)$. On pose $\phi := \mathbb{P}(f)$.

1. Pour l'application f, que dire d'un point fixe de ϕ ?
2. On suppose que $\dim \mathbb{P}(E) = 1$. Si ϕ admet trois points fixes, montrer que $\phi = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}(E)}$.

Exercice 17 (Points fixes)

On suppose que $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie et soit $h : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E)$ une homographie.

1. On suppose que $k = \mathbb{C}$. Montrer que h possède un point fixe.
2. On suppose que $k = \mathbb{R}$ et $\dim E$ est impair. Montrer que h possède un point fixe.
3. Trouver un contre-exemple à la question précédente si $k = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$.

Exercice 18 (Constructions à la règle)

Soient M un point et d, d' deux droites du plan affine.

1. On suppose que d et d' sont parallèles. Construire à la règle non graduée uniquement la droite (unique) passant par M parallèle à d.
2. On suppose que d et d' sont sécantes en un point N. Construire à la règle non graduée uniquement la droite (MN) lorsque N est en dehors de la feuille ou du tableau ?

Exercice 19 (Image par une homographie)

Soit A, B, C trois points alignés et A', B', C' 3 points alignés sur une autre droite. Soit φ l'unique homographie qui envoie $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$ et $C \mapsto C'$. Construire $D' = \varphi(D)$ l'image de D un point de la droite (AB). On pourra écrire φ comme un produit de deux perspectives.

Exercice 20 (Images des sommets d'un hexagone)

Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier et soit h une homographie de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dans lui-même.

1. Étant données les images A', B', D', E' des points A, B, D, E respectivement, construire les images des points restants.
2. Même question en supposant cette fois données les images A', B', C', D' des points A, B, C, D.

Exercice 21 (Images de parties du plan)

Déterminer :

1. l'image de $\mathbb{R}^2_{>0}$ par $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$;
2. l'image de $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ et } \mathrm{Im}(z) > 0\}$ par $z \mapsto \frac{2z-i}{2+iz}$;
3. l'image de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2_{>0} : y < x\}$ par $z \mapsto \frac{z}{z-1}$;
4. l'image de $]0, 1[\times\mathbb{R}$ par $z \mapsto \frac{z-1}{z}$ puis par $z \mapsto \frac{z-1}{z-2}$.