



Théorie des Groupes et Géométrie

Feuille n°2

Espaces homogènes

Exercice 1 (Topologie quotient sur un espace homogène)

On appelle *groupe topologique* un groupe G muni d'une topologie telle que la multiplication $m : G \times G \rightarrow G$ et l'inversion $\text{inv} : G \rightarrow G$ sont continues. Soit H un sous-groupe et $\pi : G \rightarrow G/H$ la projection vers le quotient de G par H agissant par multiplication à droite. On munit G/H de la topologie telle que $V \subset G/H$ est ouvert ssi $\pi^{-1}(V)$ est ouvert.

1. Démontrez que π est continue.
2. Démontrez que π est ouverte (i.e l'image de tout ouvert est un ouvert).
3. Démontrez que si Y est un espace topologique et $f : G \rightarrow Y$ une application continue constante sur les classes modulo H , alors l'application induite $\bar{f} : G/H \rightarrow Y$ est continue.
4. Démontrez que si H et G/H sont connexes, alors G est connexe.

Indication : il suffit de montrer que toute application continue $f : G \rightarrow \{0, 1\}$ est constante.

Exercice 2 (La sphère)

On note $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la sphère euclidienne de dimension n .

1. Montrez que le groupe $\text{SO}_{n+1}(\mathbb{R})$ des *déplacements* (isométries de déterminant 1) de \mathbb{R}^{n+1} agit transitivement sur S^n .
2. Décrivez les stabilisateurs des points.
3. Utilisant la relation stabilisateur-orbite et l'exercice 1, démontrez par récurrence sur n que $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe.

Exercice 3 (Bases d'un espace vectoriel)

Soient k un corps et E un k -espace vectoriel de dimension finie n .

1. Montrez que l'ensemble des bases de E est un espace principal homogène sous $\text{GL}(E)$.
2. Déduisez-en le calcul du cardinal de $\text{GL}(E)$ lorsque k est fini de cardinal q .

Décompositions et drapeaux

Exercice 4 (Transformations linéaires identiques sur une droite)

Soient k un corps et E un k -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. On fixe une droite vectorielle D de E et on étudie le fixateur $\text{GL}_D(E) := \{u \in \text{GL}(E); u|_D = \text{Id}_D\}$.

1. On note $\pi : E \rightarrow E/D$ la projection canonique.
 - (a) Montrer que pour tout $u \in \text{GL}_D(E)$ il existe un unique $\bar{u} \in \text{GL}(E/D)$ tel que $\pi \circ u = \bar{u} \circ \pi$.
 - (b) Montrer que $p : \text{GL}_D(E) \rightarrow \text{GL}(E/D)$ défini par $p(u) = \bar{u}$ est un morphisme de groupes.
2. On note U_D la partie de $\text{GL}_D(E)$ composée de Id_E et des transvections de droite D . Montrer que $\ker(p) = U_D$.
3. Soit F un supplémentaire de D dans E . On identifie $\text{GL}(F)$ à un sous-groupe de $\text{GL}_D(E)$ en associant à une application linéaire $v \in \text{GL}(F)$ l'application linéaire $\tilde{v} \in \text{GL}_D(E)$ telle que $\tilde{v}|_F = v$ et $\tilde{v}|_D = \text{Id}_D$. Montrer que $p|_{\text{GL}(F)} : \text{GL}(F) \rightarrow \text{GL}(E/D)$ est un isomorphisme.

Indication : choisir des bases et utiliser des descriptions matricielles.
4. En déduire que p est surjectif et qu'on a un isomorphisme $\text{GL}_D(E) \simeq U_D \rtimes \text{GL}(F)$.

Exercice 5 (Nombre de drapeaux complets sur un corps fini)

Soient k un corps fini à q éléments et E un k -espace vectoriel de dimension finie n . On note $\mathcal{F}(E)$ l'ensemble des drapeaux complets $F_0 = \{0\} \subsetneq F_1 \subsetneq \dots \subsetneq F_n = E$.

1. Combien y a-t-il de vecteurs non nuls dans E ? Combien y a-t-il de droites vectorielles dans E ? En utilisant une partition $\mathcal{F}(E) = \coprod_D \mathcal{F}_D(E)$ où $\mathcal{F}_D(E)$ est l'ensemble des drapeaux complets dont le premier espace F_1 est égal à une droite D fixée, déduisez-en le cardinal de $\mathcal{F}(E)$.
2. Quel est le cardinal de $\text{GL}(E)$? En faisant agir $\text{GL}(E)$ transitivement sur $\mathcal{F}(E)$, déduisez-en d'autre manière le cardinal de $\mathcal{F}(E)$.

Exercice 6 (Décompte des automorphismes diagonalisables)

On note E un espace vectoriel de dimension n sur un corps fini à q éléments.

1. Montrez que $f \in \text{GL}(E)$ est diagonalisable si et seulement si $f^{q-1} = \text{Id}$.

On fixe un générateur ζ du groupe multiplicatif (cyclique) \mathbb{F}_q^\times .

2. On pose $E_i = \ker(f - \zeta^i)$, pour $f \in \text{GL}(E)$ et $i = 1, \dots, q-1$. Montrez que l'application $f \mapsto (E_1, \dots, E_{q-1})$ établit une bijection entre l'ensemble des automorphismes diagonalisables de $\text{GL}(E)$ et l'ensemble des décompositions de E en somme directe de $q-1$ sous-espaces.
3. On fixe un $(q-1)$ -uplet d'entiers $\nu = (n_1, \dots, n_{q-1})$ tel que $\sum n_i = n$. On note X_ν l'ensemble des décompositions de E en somme directe de $q-1$ sous-espaces E_i tels que $\dim(E_i) = n_i$. Montrez que l'action de $\text{GL}(E)$ sur X_ν définie par $g \cdot (E_1, \dots, E_{q-1}) := (g(E_1), \dots, g(E_{q-1}))$ est transitive et décrivez le stabilisateur d'un point.
4. Déduisez-en que le nombre d'automorphismes diagonalisables de $\text{GL}(E) \simeq \text{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ est égal à :

$$\sum_{\substack{(n_1, \dots, n_{q-1}) \\ \text{t.q. } n_1 + \dots + n_{q-1} = n}} \frac{|\text{GL}_n(\mathbb{F}_q)|}{|\text{GL}_{n_1}(\mathbb{F}_q)| \dots |\text{GL}_{n_{q-1}}(\mathbb{F}_q)|}.$$

Exercice 7 (Stabilisateur versus fixateur)

Lorsqu'un groupe G agit sur un ensemble X , on appelle

- *stabilisateur* d'une partie $Y \subset X$ le sous-groupe $\text{Stab}(Y)$ composé des $g \in G$ tels que $g(Y) = Y$,
- *fixateur* de Y le sous-groupe $\text{Fix}(Y) \subset \text{Stab}(Y)$ composé des $g \in G$ tels que $g|_Y = \text{Id}_Y$.

Soient k un corps, E un k -espace vectoriel de dimension finie, $G = \text{GL}(E)$ le groupe linéaire de E , et $D \subset E$ une droite vectorielle. Démontrez qu'on a un isomorphisme $\text{Stab}(D) \simeq \text{Fix}(D) \rtimes k^\times$.

Le groupe (projectif) (spécial) linéaire

Exercice 8 (PSL et PGL)

On note $e_n : k^\times \rightarrow k^\times$ l'application donnée par $e_n(x) = x^n$, ainsi que $\mu_n(k)$ son noyau et $k^{\times n}$ son image. On note Z le centre de $\text{GL}_n(k)$. On rappelle que $\mu_n(\mathbb{F}_q)$ est un groupe cyclique d'ordre $n \wedge (q-1)$.

1. Rappeler pourquoi le noyau du morphisme canonique $\varphi : \text{SL}_n(k) \rightarrow \text{PGL}_n(k)$ est $\mu_n(k)$.
2. Montrer que le morphisme $\det : \text{GL}_n(k) \rightarrow k^\times$ induit un morphisme surjectif $\det : \text{PGL}_n(k) \rightarrow k^\times / k^{\times n}$ de noyau $\text{PSL}_n(k)$.
3. Montrer que le morphisme canonique $\text{SL}_n(k) \rightarrow \text{PGL}_n(k)$ est un isomorphisme si et seulement si e_n est un isomorphisme.
4. Pour $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_q, \mathbb{Q}$, $n \geq 2$ discuter l'assertion $e_n : k^\times \rightarrow k^\times$ est un isomorphisme.

Exercice 9 (PSL et PGL, suite)

À l'aide de l'exercice 8, montrer que :

1. Si k est algébriquement clos alors l'inclusion $\text{PSL}_n(k) \rightarrow \text{PGL}_n(k)$ est un isomorphisme.
2. Si $k = \mathbb{R}$ et n est impair alors l'inclusion $\text{PSL}_n(k) \rightarrow \text{PGL}_n(k)$ est un isomorphisme.
3. Si $k = \mathbb{R}$ et n est pair alors l'image de l'inclusion $\text{PSL}_n(k) \rightarrow \text{PGL}_n(k)$ est d'indice 2.

4. Si k est un corps fini alors l'image de l'inclusion $\mathrm{PSL}_n(k) \rightarrow \mathrm{PGL}_n(k)$ est d'indice $n \wedge (q - 1)$. En particulier, d'indice 2 si $n = 2$ et k de caractéristique différente de 2.

Exercice 10 (GL_n n'est pas souvent un produit direct de SL_n)

On rappelle que $\mathrm{SL}_n(k)$ possède un complément dans $\mathrm{GL}_n(k)$, c'est-à-dire un sous-groupe $H' \subset \mathrm{GL}_n(k)$ tel que :

$$H' \cap \mathrm{SL}_n(k) = 1 \quad \text{et} \quad H' \mathrm{SL}_n(k) = \mathrm{GL}_n(k)$$

ou de façon équivalente : $\mathrm{GL}_n(k) = \mathrm{SL}_n(k) \rtimes H'$. On cherche une condition nécessaire et suffisante sur (n, k) pour qu'il existe un complément tel que ce produit est en fait direct.

On suppose qu'il existe un sous-groupe $H \subset \mathrm{GL}_n(k)$ tel que $\mathrm{GL}_n(k) = \mathrm{SL}_n(k) \times H$, ou de façon équivalente :

$$H \cap \mathrm{SL}_n(k) = 1, \quad H \mathrm{SL}_n(k) = \mathrm{GL}_n(k), \quad [H, \mathrm{SL}_n(k)] = 1.$$

1. Montrer que le déterminant induit un isomorphisme de H sur k^\times .
2. Montrer que $H \subset Z := Z(\mathrm{GL}_n(k))$.
3. Montrer que Z est un complément de $\mathrm{SL}_n(k)$ si et seulement si l'application déterminant de Z vers k^\times est un isomorphisme.
4. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur k et n pour qu'il existe un tel H .

Exercice 11 (Groupe affine d'un espace vectoriel)

Soit E un espace vectoriel sur un corps k . On appelle *groupe affine de E* noté $\mathrm{GA}(E)$ l'ensemble des bijections $f : G \rightarrow G$ de la forme $f(x) = a(x) + b$ avec $a \in \mathrm{GL}(E)$ et $b \in E$.

1. Dans $\mathrm{GA}(E)$, décrivez le produit et l'inverse.
2. Montrez que $\mathrm{GA}(E)$ est produit semi-direct du sous-groupe distingué T des translations ($a = \mathrm{Id}$) et du sous-groupe L des applications linéaires ($b = 0$). Quel est le morphisme d'action de L sur T ?
3. On appelle *homothétie-translation* un morphisme qui est le composé d'une homothétie et d'une translation. Montrez que les homothéties-translations forment un sous-groupe.

Transvections

Dans les exercices qui suivent, E est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k . De plus, pour toute forme non nulle $f \in E^*$ et tout vecteur non nul $a \in \ker(f)$ on note $u_{a,f}$ la transvection définie par $u(x) = x + f(x)a$.

Exercice 12 (Connexité par arcs de SL)

Lorsque $k = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , déduisez du fait que $\mathrm{SL}(E)$ est engendré par les transvections qu'il est connexe par arcs.

Exercice 13 (Décompte des transvections)

On considère un espace vectoriel de dimension finie E sur un corps fini k de cardinal q .

1. Pour tout choix d'un vecteur $a \neq 0$ et d'une forme linéaire $f \neq 0$ tels que $f(a) = 0$, on note $u_{a,f}$ la transvection définie par $u(x) = x + f(x)a$. Montrez que $u_{a,f} = u_{a',f'}$ si et seulement si il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $f' = \lambda f$ et $a' = \lambda^{-1}a$.
2. On note $H = \ker(f)$ et on fixe un vecteur $b \notin H$. Démontrez que le commutant de $u_{a,f}$ dans $\mathrm{GL}(E)$ est l'ensemble des $g \in \mathrm{GL}(E)$ de la forme $g = \lambda v$ avec $\lambda \in k^\times$ et $v \in \mathrm{GL}(E)$ vérifiant $v(a) = a$, $v(H) = H$, $v(b) \in b + H$. La matrice de v dans une base obtenue en complétant une base de H avec b est donc de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & & & & * \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & * & & * \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

3. Calculez le cardinal de ce commutant et déduisez-en que le nombre de transvections dans $\mathrm{GL}(E)$ vaut :

$$\frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1)}{q - 1}.$$

Exercice 14 (Transvections d'hyperplan fixé)

Soit H un hyperplan de E . On note $T(H)$ la réunion de l'ensemble des transvections d'hyperplan H et de l'identité.

1. Démontrez que $T(H) = \{u \in \text{SL}(E); u|_H = \text{Id}_H\}$ et que c'est un sous-groupe de $\text{SL}(E)$. Donnez une représentation matricielle de $T(H)$ dans une base bien choisie.
2. Démontrez que pour toute forme linéaire f_0 de noyau H , l'application $a \mapsto u_{a, f_0}$ induit un isomorphisme de groupes $H \xrightarrow{\sim} T(H)$.

Exercice 15 (Transvections de droite fixée)

Soit D une droite de E . On note $U(D)$ la réunion de l'ensemble des transvections de droite D et de l'identité.

1. Démontrez que $U(D) = \{u \in \text{SL}(E); \text{im}(u - \text{Id}) \subset D\}$ et que c'est un sous-groupe de $\text{SL}(E)$. Donnez une représentation matricielle de $U(D)$ dans une base bien choisie.
2. Démontrez que pour tout vecteur directeur a_0 de D , l'application $f \mapsto u_{a_0, f}$ induit un isomorphisme de groupes $D^\perp \xrightarrow{\sim} U(D)$, où $D^\perp = \{f \in E^*, f|_D = 0\}$ est l'orthogonal de D .

Exercice 16 (Transvections d'hyperplan et droite fixés)

Soient D une droite et H un hyperplan tels que $D \subset H$. On choisit a_0 et f_0 tels que $D = \text{Vect}(a_0)$ et $H = \ker(f_0)$.

1. Démontrez que l'application $\lambda \mapsto u_{\lambda a_0, f_0}$ induit un isomorphisme de groupes $(k, +) \xrightarrow{\sim} T(H) \cap U(D)$.
2. Donnez la représentation matricielle de $T(H) \cap U(D)$ lorsque $H = \ker(e_j^*)$ et $D = \text{Vect}(e_i)$, où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E et $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ est sa base duale. (Il s'agit des matrices $T_{i,j}(\lambda)$!)

Exercice 17 (Dualité pour les transvections)

Pour tout $u \in \text{L}(E)$, on note $u^* \in \text{L}(E^*)$ la transposée de u , définie par $u^*(\varphi) = \varphi \circ u$.

1. Démontrez que $u : E \rightarrow E$ est une transvection d'hyperplan H et de droite D si et seulement si $u^* : E^* \rightarrow E^*$ est une transvection d'hyperplan D^\perp et de droite H^\perp .
2. Pour souligner la dépendance en E , on utilise maintenant les notations $T(E, H)$ et $U(E, D)$ pour les groupes de transvections de $\text{SL}(E)$ introduits dans les exercices 14 et 15. Démontrez qu'on a un isomorphisme de groupes :

$$\begin{aligned} T(E, H) &\xrightarrow{\sim} U(E^*, H^\perp) \\ u &\longmapsto u^*. \end{aligned}$$

3. Vérifiez que les résultats des exercices 14 et 15 se déduisent l'un de l'autre par dualité.

Transvections élémentaires

Exercice 18 (Engendrement par les transvections élémentaires)

On fixe une base \mathcal{B} de E . On fait alors les identifications $E = k^n$ et $\text{GL}(E) = \text{GL}_n(k)$. On appelle *matrices de transvection élémentaires* (relativement à la base fixée) les matrices $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ pour $i \neq j$.

1. Quel est l'effet sur une matrice M de la multiplication à gauche, resp. à droite, par $T_{i,j}(\lambda)$?
2. On note L_1, \dots, L_n les lignes de M . Montrez que la multiplication de M à gauche par $T_{i,j}(1)T_{j,i}(-1)T_{i,j}(1)$ a pour effet de remplacer L_i par L_j et L_j par $-L_i$.
3. En appliquant le pivot de Gauss, montrez que les matrices de transvection élémentaires engendrent $\text{SL}(E)$.

Exercice 19 (Petites parties génératrices de $\text{SL}(E)$)

On note \mathbb{F}_q , avec $q = p^d$ et p premier, un corps fini à q éléments.

1. Combien y a-t-il de matrices transvection élémentaires dans $\text{SL}_n(\mathbb{F}_q)$?
2. En utilisant l'identité $T_{i,j}(\lambda)T_{i,j}(\mu) = T_{i,j}(\lambda + \mu)$, montrez que $\text{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ peut être engendré par $d(n^2 - n)$ éléments.
3. Démontrez que $\text{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ peut être engendré par les deux éléments $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.