Théorie des Groupes et Géométrie

Contrôle Continu n°2 du vendredi 9 décembre 2022

Exercice 1, sur 5 points

1. (1pt) Notons B l'ensemble des bases de E. Comme l'action $\mathrm{GL}(E) \times B \to B$, $(f, \mathscr{B}) \mapsto f(\mathscr{B})$ est libre et transitive, on a $|\mathrm{GL}(E)| = |B|$ et on est ramené à dénombrer les bases. Posons par commodité $e_0 = 0$, alors une base est formée en choisissant successivement pour chaque $i = 0, \ldots, n-1$ un vecteur e_{i+1} n'appartenant pas à $\langle e_0, \ldots, e_i \rangle$. Le nombre de choix pour e_{i+1} est $q^n - q^i$ donc le nombre de bases, qui est le cardinal recherché, est $\prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i)$.

2. (1pt) Notons X l'ensemble des droites vectorielles de E. L'application $f : E \setminus \{0\} \to X$ qui associe à un vecteur non nul la droite qu'il engendre est surjective, et $f(v) = f(v')$ si et seulement si v et v' sont colinéaires. Comme les classes de colinéarité (action du groupe $G = k^\times$) ont pour cardinal $q - 1$, on obtient $|X| = |E \setminus \{0\}|/(q-1) = (q^n - 1)/(q-1)$ qui est le cardinal demandé.

3. (1pt) L'ensemble des droites projectives de $\mathbb{P}(E)$ est par définition en bijection avec l'ensemble X des plans vectoriels de E. Si $n = 1$, on a $|X| = 0$. Si $n \geqslant 2$, l'action de $G = \mathrm{GL}(E)$ sur X est transitive par un résultat du cours. Fixons une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. Le stabilisateur G_F du plan $F = \langle e_1, e_2 \rangle$ est isomorphe au sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(k)$ composé des matrices $\left(\begin{smallmatrix} M & M'' \\ 0 & M' \end{smallmatrix}\right)$ avec $M \in \mathrm{GL}_2(k)$, $M' \in \mathrm{GL}_{n-2}(k)$, $M'' \in \mathrm{Mat}_{2,n-2}(k)$. Son cardinal est $c := |\mathrm{GL}_2(k)||\mathrm{GL}_{n-2}(k)|q^{2n-4}$. On en déduit, à l'aide de la formule de la question 1 lorsque $n \geqslant 3$ et de manière directe lorsque $n = 2$, que $|X| = |G|/|G_F| = |\mathrm{GL}_n(k)|/c = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)}{(q^2-1)(q-1)}$.

4. (2pts) Soit X l'ensemble des droites affines de E. Le groupe $G = (E, +)$ agit par $v \cdot \mathscr{D} := v + \mathscr{D} = \tau_v(\mathscr{D})$ où τ_v est la translation de vecteur v. Pour toute droite $\mathscr{D}$ et tout choix d'un point $x \in \mathscr{D}$, la translatée $D = (-x) + \mathscr{D}$ n'est autre que la direction de $\mathscr{D}$. On voit ainsi que deux droites affines $\mathscr{D}, \mathscr{D}'$ sont dans la même G-orbite ssi elles ont même direction D, et D est la seule droite *vectorielle* (i.e. passant par 0) de l'orbite. Ainsi l'ensemble des orbites est indexé par l'ensemble $\mathbb{P}(E)$ des droites vectorielles de E (1pt). Regardons maintenant l'orbite $O_G(D)$. Comme $v + D = D$ ssi $v \in D$, on voit que le stabilisateur de D est égal à D elle-même, donc par la relation stabilisateur-orbite on a $|O_G(D)| = |E/D| = q^n/q$. Finalement $|X| = \Sigma_{D \in \mathbb{P}(E)} |O_G(D)| = |\mathbb{P}(E)| \times q^{n-1} = q^{n-1}(q^n - 1)/(q-1)$ d'après la question 2 (1pt).

Remarque : on pouvait aussi considérer l'ensemble Y des couples de points distincts de E, et l'application surjective $f : Y \to X$ qui à deux points associe la droite affine qui les contient. Le cardinal de Y est $q^n(q^n-1)$ et pour chaque droite affine $\mathscr{D}$, la fibre $f^{-1}(\{\mathscr{D}\})$ est composée de l'ensemble des couples de points distincts de $\mathscr{D}$, de cardinal $q(q-1)$. La partition $Y = \amalg_{\mathscr{D}} f^{-1}(\{\mathscr{D}\})$ fournit $q^n(q^n-1) = q(q-1)|X|$ d'où le résultat.

Exercice 2, sur 3 points

Notons $E = \{(v_n)_{n \geqslant 0} \in k^{\mathbb{N}}; v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n, \forall n \geqslant 0\}$. C'est un sous-espace vectoriel de $k^{\mathbb{N}}$, isomorphe à k^2 par l'application $(v_n)_{n \geqslant 0} \mapsto (v_0, v_1)$ (1pt). De plus si $(u_n) \in \mathscr{E}$ et $(v_n) \in E$, la suite somme $w_n := (v_n + u_n)$ vérifie $w_{n+2} = v_{n+2} + u_{n+2} = av_{n+1} + bv_n + au_{n+1} + bu_n + c = aw_{n+1} + bw_n + c$ donc E agit sur $\mathscr{E}$ (1pt). Si $(u_n), (u'_n) \in \mathscr{E}$ alors il existe une unique suite (v_n) telle que $(u'_n) = (v_n + u_n)$, à savoir la différence $(u'_n - u_n)$, et c'est une suite de E (car les coefficients c s'annulent). Ainsi $\mathscr{E}$ est muni d'une action libre et transitive de E. De plus il est non vide car $\mathscr{E} \to k^2$, $(u_n)_{n \geqslant 0} \mapsto (u_0, u_1)$ est bijective, donc c'est un espace affine de direction E et dimension 2 (1pt).

Exercice 3, sur 4 points

1. (1pt) Notons p la caractéristique de k. Si $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$ alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{AI}$. Comme $A \neq B$, on a $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$ donc nécessairement $p \neq 2$. Réciproquement, si $p \neq 2$ alors le calcul précédent montre que l'unique point I tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ vérifie la propriété du milieu. Une condition nécessaire et suffisante est donc que $p \neq 2$.

2.(a) (2pts) L'application linéarisée d'une homothétie de rapport λ est l'homothétie vectorielle $\lambda\mathrm{Id}$. De plus, la linéarisée d'une composée est la composée des linéarisées (0,5pt). De cela découle que la linéarisée de $f = s_J \circ s_I$ est l'identité, donc f est une translation (0,5pt). Par ailleurs, la propriété de définition du milieu dit que $s_I(A) = B$ et $s_J(B) = C$, donc $f(A) = C$. Le vecteur de la translation f est donc $\overrightarrow{AC}$ (1pt).

2.(b) (1pt) Les mêmes arguments montrent que la linéarisée de g est l'homothétie vectorielle $-\mathrm{Id}$. Il en découle que g est une homothétie de rapport -1 i.e. une symétrie centrale. Comme de plus $s_K(C) = B$, on voit que $g(A) = s_K(f(A)) = A$ donc g est la symétrie centrale de centre A.

Exercice 4, sur 3 points

La sphère unité S^1 s'identifie au groupe des nombres complexes de module 1 et on peut considérer l'application d'élévation au carré $f : S^1 \to S^1$, $x \mapsto x^2$. Celle-ci est surjective car $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(it) \in S^1$ est surjective. De plus on a $f(x) = f(x')$ si et seulement si $x' = \pm x$, c'est-à-dire ssi $x' \sim x$, où $\sim$ est la relation d'antipodie, dont les classes sont les $\{\pm x\}$. Ceci signifie que f passe au quotient en une bijection $g : S^1/\sim \to S^1$ (1pt). Lorsque $S^1/\sim$ est muni de la topologie quotient, cette bijection est continue. Par ailleurs, d'après le cours l'application $S^1 \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ qui à un vecteur de norme 1 du plan associe la droite vectorielle qu'il engendre induit un homéomorphisme $S^1/\sim \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ (1pt). Finalement nous avons une bijection continue $h : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to S^1$. Comme $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est compact et S^1 est séparé, cette application est fermée, donc finalement un homéomorphisme (1pt).

Exercice 5, sur 5 points

1. (1pt) Si M est la matrice de f dans une base (e_i) de E, la matrice de f^* dans la base duale (e_i^*) est la transposée ${}^tM$. Considérons la matrice $X\cdot \mathrm{I}_n - M$ à coefficients dans le corps $k(X)$. Comme le déterminant est invariant par transposition, on a $\det(X\cdot\mathrm{I}_n - {}^tM) = \det({}^t(X\cdot\mathrm{I}_n - M)) = \det(X\cdot\mathrm{I}_n - M)$. Ceci signifie que f et f^* ont même polynôme caractéristique, donc même spectre.

2.(a) (1pt) Soit $H \subset E$ la direction de $\mathscr{H}$; ainsi $\mathscr{H}$ est la H-orbite d'un quelconque de ses points a, c'est-à-dire $\mathscr{H} = a + H$. Notons $\psi : E \to k$ une forme linéaire de noyau H, et $\lambda \coloneqq \psi(a)$. De l'égalité $\mathscr{H} = a + H$ découle que $\mathscr{H} = \{x \in E;\ \psi(x) = \lambda\}$. Comme $\mathscr{H}$ ne contient pas l'origine, ceci implique $\lambda \neq 0$. La forme $\varphi = \lambda^{-1}\psi$ vérifie donc $\mathscr{H} = \{x \in E;\ \varphi(x) = 1\}$.

2.(b) (1pt) Soit $x \notin H$ et $\lambda \coloneqq \varphi(x) \neq 0$. Alors $\varphi(\lambda^{-1}x) = 1$ donc $\lambda^{-1}x \in \mathscr{H}$. Comme $\mathscr{H}$ est stable par f, on a $f(\lambda^{-1}x) \in \mathscr{H}$. En particulier $\varphi(f(\lambda^{-1}x)) = 1 = \varphi(\lambda^{-1}x)$. En multipliant par λ, il vient $(\varphi \circ f)(x) = \varphi(x)$.

2.(c) (1pt) Soit $x \in H$. Comme H est un hyperplan, on a $H \neq E$ donc on peut trouver dans E un vecteur $y \notin H$. Dans ce cas, $x + y \notin H$. D'après la question précédente utilisée avec y et $x+y$, $(\varphi \circ f)(x) = (\varphi \circ f)(x+y) - (\varphi \circ f)(y) = \varphi(x+y) - \varphi(y) = \varphi(x)$.

2.(d) (0,5pt) Les questions (b) et (c) prises ensemble démontrent que $\varphi \circ f = \varphi$. Ceci signifie que $f^*(\varphi) = \varphi$ où $f^* : E^* \to E^*$ est l'application transposée. Ainsi φ est un vecteur propre pour f^* associé à la valeur propre 1. Puisque f et f^* ont même spectre par la question 1, alors 1 est valeur propre pour f.

3. (0,5pt) Une homothétie de rapport $\lambda \neq 1$ (par exemple $\lambda = 0$) laisse stables tous les hyperplans vectoriels sans avoir 1 pour valeur propre.

Exercice 6, sur 5 points

1. (1pt) Comme $\ker(\pi)$ est composé des homothéties $\lambda \cdot \mathrm{I}_n$, alors $\ker(\varphi) = \ker(\pi) \cap \mathrm{SL}_n(k)$ est composé de celles de déterminant 1 i.e. telles que $\lambda^n = 1$. Ceci équivaut à dire que $\lambda \in \mu_n(k)$, donc $\ker(\varphi) = \mu_n(k)\cdot \mathrm{I}_n$. On sait par ailleurs que le sous-groupe $\mu_n(k) \cdot \mathrm{I}_n$ est le centre $Z(\mathrm{SL}_n(k))$, donc par le théorème d'isomorphisme $\mathrm{im}(\varphi) \simeq \mathrm{SL}_n(k)/Z(\mathrm{SL}_n(k)) = \mathrm{PSL}_n(k)$.

2. (2pts) Considérons le morphisme $f : \mathrm{GL}_n(k) \to k^\times \to k^\times/k^{\times n}$ composé du déterminant et de la projection modulo le sous-groupe des puissances n-ièmes de $k^\times$. Ce morphisme est surjectif (comme composé de deux surjections) et de noyau égal au sous-groupe $H_n = \det^{-1}(k^{\times n}) \subset \mathrm{GL}_n(k)$ composé des matrices dont le déterminant est une puissance n-ième. Les homothéties de $\mathrm{GL}_n(k)$ sont dans le noyau de f, donc le théorème de passage au quotient fournit un morphisme induit $\delta : \mathrm{PGL}_n(k) \to k^\times/k^{\times n}$ (1pt) qui est surjectif et de noyau $H_n/Z(\mathrm{GL}_n(k))$. Il ne reste qu'à identifier ce noyau avec $\mathrm{im}(\varphi)$. Pour cela, compte tenu du résultat de la question précédente, il suffit de montrer que le morphisme $u : \mathrm{PSL}_n(k) = \mathrm{SL}_n(k)/\mu_n(k) \to H_n/Z(\mathrm{GL}_n(k))$, déduit du morphisme $\mathrm{SL}_n(k)/ \to H_n/Z(\mathrm{GL}_n(k))$ par passage au quotient, est un isomorphisme. Or d'une part, l'égalité $\mu_n(k) = Z(\mathrm{SL}_n(k)) = \mathrm{SL}_n(k) \cap Z(\mathrm{GL}_n(k))$ implique que u est injectif. D'autre part, toute matrice $M \in H_n$ a un déterminant puissance n-ième : $\det(M) = \lambda^n$ pour un $\lambda \in k^\times$, donc $N \coloneqq \lambda^{-1}M$ est une matrice de $\mathrm{SL}_n(k)$ telle que $u(N)$ est égale à la classe résiduelle de M dans le groupe quotient $H_n/Z(\mathrm{GL}_n(k))$. Donc u est surjectif (1pt).

3. (1.5pts) Le morphisme φ est injectif si et seulement si $\ker(\varphi) = 1$, ce qui d'après la question 1 équivaut à $\mu_n(k) = 1$ i.e. e_n injectif. Ensuite φ est surjectif si et seulement si $\mathrm{im}(\varphi) = \mathrm{PGL}_n(k)$. Or, le théorème d'isomorphisme $\mathrm{PGL}_n(k)/\ker(\delta) \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}(\delta)$ joint aux résultats de la question 2 fournit un isomorphisme $\mathrm{PGL}_n(k)/\mathrm{im}(\varphi) \xrightarrow{\sim} k^\times/k^{\times n}$. On voit ainsi que $\mathrm{im}(\varphi) = \mathrm{PGL}_n(k)$ si et seulement si $k^\times = k^{\times n}$ c'est-à-dire ssi e_n est surjectif. Finalement φ est un isomorphisme ssi e_n l'est.

4. (0,5pt) Prenons $k = \mathbb{R}$ et $n \geqslant 3$ un entier impair, ou alors k un corps fini de cardinal q, et n un entier premier avec $q - 1$. Dans ces exemples e_n est un isomorphisme (car $k^\times$ est cyclique de cardinal $q-1$ lorsque k est fini de cardinal q), donc φ également.