Théorie des Groupes et Géométrie

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Contrôle continu n°2
Vendredi 9 décembre 2022
2 heures

⋆ Il n'est pas nécessaire de faire l'intégralité du contrôle pour avoir la note maximale.

⋆ Les documents et les téléphones sont interdits.

⋆ Dans tout le sujet on note k un corps ; $n \geqslant 1$ un entier ; E un k-espace vectoriel de dimension n.

Composer les exercices 1, 2, 3, 4 sur une copie n°1 qui sera corrigée par M. Romagny

Exercice 1, environ sur 5 points

On suppose que k est fini, de cardinal noté q.

1. Combien y a-t-il d'éléments dans $\mathrm{GL}(E)$?
2. Combien y a-t-il de droites vectorielles dans E ?
3. Combien y a-t-il de droites projectives dans $\mathbb{P}(E)$?
4. Combien y a-t-il de droites affines dans E ? (*On pourra considérer l'action de E par translation sur l'ensemble des droites affines, les orbites étant les droites de direction fixée.*)

Exercice 2, environ sur 3 points

Soient a, b, c trois éléments de k. On considère l'ensemble $\mathscr{E}$ des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de k vérifiant la relation $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c$. Démontrez que $\mathscr{E}$ est un espace affine, donnez sa direction E ainsi que sa dimension.

Exercice 3, environ sur 4 points

Soient A, B, C trois points distincts dans un plan affine sur k. On appelle *milieu de* $\{A, B\}$ et on note $m(A, B)$ un point I tel que $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$. De plus, si M est un point du plan on note s_M l'homothétie de centre M et de rapport -1, aussi appelée symétrie centrale de centre M.

1. À quelle condition nécessaire et suffisante sur le corps k le milieu de $\{A, B\}$ existe-t-il ?

Dans la suite on suppose cette condition vérifiée et on note $I = m(A, B)$, $J = m(B, C)$, $K = m(C, A)$.

2. Déterminez la nature géométrique et les éléments caractéristiques des transformations :
   (a) $f \coloneqq s_J \circ s_I$,
   (b) $g \coloneqq s_K \circ s_J \circ s_I$.

Exercice 4, environ sur 3 points

Démontrez que la droite projective réelle $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est homéomorphe à la sphère unité S^1 de $\mathbb{R}^2$. (*On pourra représenter $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ comme quotient de S^1 par la relation d'équivalence $x \sim -x$.*)

Composer les exercices 5, 6 sur une copie n°2 qui sera corrigée par S. Rostam

Exercice 5, environ sur 5 points

Soit $f : E \to E$ une application linéaire qui laisse stable un hyperplan affine $\mathscr{H} \subset E$.

1. Préliminaire : démontrez que f et l'application transposée $f^* : E^* \to E^*$ ont mêmes spectres.
2. On suppose que $\mathscr{H}$ est *strictement affine*, c'est-à-dire qu'il ne contient pas l'origine 0.
   (a) Démontrez qu'il existe une forme linéaire $\varphi : E \to k$ telle que $\mathscr{H} = \{x \in E;\ \varphi(x) = 1\}$.
   (b) On note $H = \ker(\varphi)$. Démontrez que si $x \notin H$, on a $(\varphi \circ f)(x) = \varphi(x)$.
   (c) Déduisez-en que si $x \in H$, on a $(\varphi \circ f)(x) = \varphi(x)$.
   (d) Déduisez-en que 1 est valeur propre pour f.
3. On suppose que $\mathscr{H}$ contient l'origine 0. Donnez un contre-exemple à la conclusion de 2.

Exercice 6, environ sur 5 points

Soit $\varphi : \mathrm{SL}_n(k) \to \mathrm{PGL}_n(k)$ le morphisme de groupes composé de l'inclusion $\mathrm{SL}_n(k) \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(k)$ et de la projection canonique $\pi : \mathrm{GL}_n(k) \to \mathrm{PGL}_n(k)$. Pour l'étudier on introduit le morphisme $e_n : k^\times \to k^\times$, $x \mapsto x^n$ ainsi que son noyau $\mu_n(k)$ et son image $k^{\times n}$.

1. Démontrez que $\ker(\varphi) = \mu_n(k) \cdot \mathrm{I}_n$ et $\mathrm{im}(\varphi) \simeq \mathrm{PSL}_n(k)$.
2. Démontrez que le déterminant $\mathrm{GL}_n(k) \to k^\times$ induit un morphisme $\delta : \mathrm{PGL}_n(k) \to k^\times / k^{\times n}$ surjectif et de noyau $\mathrm{im}(\varphi)$.
3. Démontrez que φ est un isomorphisme si et seulement si e_n est un isomorphisme.
4. Donnez un exemple de corps k et d'entier $n \geqslant 2$ tel que φ est un isomorphisme.