Théorie des Groupes et Géométrie

Contrôle Continu n°1 du vendredi 22 octobre 2021

Exercice 1 (3 points)

1. (2pts) Soit $X := \{x = (x_1, \dots, x_p) \in G^p;\ x_1 \cdots x_p = 1\}$. Pour $x \in X$ posons $\sigma(x) = (x_2, \dots, x_p, x_1)$. En conjuguant par x_1, l'équation $x_1 \cdots x_p = 1$ fournit $x_2 \cdots x_p x_1 = 1$, donc $\sigma(x) \in X$. Ceci définit une application $\sigma : X \to X$ puis, comme $\sigma^p = \mathrm{Id}$, une action de $\Gamma := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur X.

La relation stabilisateur-orbite $\omega(x) \simeq \Gamma/\Gamma_x$ montre que le cardinal de l'orbite $\omega(x)$ est égal à 1 ou p. Notons F l'ensemble des x tels que $|\omega(x)| = 1$, c'est-à-dire $\sigma(x) = x$, ou encore $x_i = x_1$ pour tout i, avec la condition $(x_1)^p = 1$. La partition de X en Γ-orbites fournit $|X| = |F| + \Sigma\, |\omega_i|$ où les orbites ω_i sont celles de cardinal p. Par ailleurs, la projection $X \to G^{p-1}$ sur les $p-1$ premières coordonnées est une bijection, donc $|X| = |G|^{p-1}$ est multiple de p. On déduit donc $0 \equiv |F| \mod p$. Comme $(1, \dots, 1) \in F$, on a $|F| \geq p$ donc il y a dans F un élément $(x, \dots, x)$ avec $x \neq 1$. Un tel x est un élément d'ordre p dans G.

2. (1pt) Soit q un facteur premier de $|G|$. D'après la question 1, il existe un élément $x \in G$ d'ordre q. Or par hypothèse l'ordre de x est une puissance de p, donc $q = p$. Donc le seul facteur premier de $|G|$ est p, et G est un p-groupe.

Exercice 2 (5 points)

1. (1pt) Soit M une matrice diagonalisable : $M = PDP^{-1}$ avec D diagonale. Les valeurs propres de M sont non nulles, donc égales à 1 puisque $k = \mathbb{F}_2$. Ainsi D est la matrice identité, donc M également. Le sous-groupe H engendré par ces matrices est donc $\{\mathrm{I}_n\}$.

2. (a) (2pts) La matrice D est diagonale donc diagonalisable. Par produit par blocs, on a :

$$D^{-1}U = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_{n-2} & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix} \end{array}\right).$$

La matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a^{-1} \end{smallmatrix}\right)$ est triangulaire, ses valeurs propres se lisent sur la diagonale, ce sont 1 et a^{-1} qui sont distinctes, donc elle est diagonalisable. Ceci montre que $D^{-1}U$ est diagonalisable par blocs, donc diagonalisable. Pour finir, comme H est engendré par les matrices diagonalisables il contient D et $D^{-1}U$, et comme c'est un sous-groupe il contient leur produit qui est la matrice de transvection U.

2. (b) (2pts) Par définition de « diagonalisable », l'ensemble A des matrices diagonalisables est stable par conjugaison dans G, donc le sous-groupe $H = \langle A \rangle$ est distingué. Par la question précédente H contient une matrice de transvection ; or toutes les transvections sont conjuguées dans $\mathrm{GL}_n(k)$, donc elles appartiennent toutes à H. Enfin les dilatations sont diagonalisables et appartiennent donc également à H. Comme par théorème les transvections et les dilatations forment une famille génératrice de $\mathrm{GL}_n(k)$, on a finalement $H = \mathrm{GL}_n(k)$.

Exercice 3 (6 points)

1. (1pt) Le sous-groupe $V \subset A_4$ engendré par les double transpositions est distingué, d'indice 3, isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. On a donc la suite de composition $A_4 \rhd V \rhd \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \{0\} \rhd \{0\} \times \{0\}$ d'où la suite des facteurs de Jordan-Hölder $\mathbf{JH}(A_4) = \{\{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\}\}$. Le groupe $G' = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ n'est pas isomorphe à G car il est abélien, et il a évidemment même suite de facteurs de Jordan-Hölder.

2. (2pts) Soit $G/H \rhd \bar{K}_1 \rhd \cdots \rhd \bar{K}_s \rhd \{1\}$ une suite de composition pour G/H et notons $Q_i = \bar{K}_{i-1}/\bar{K}_i$ avec $i = 1, \dots, s$ les quotients simples associés. Notons $\pi : G \to G/H$ la projection canonique et $K_i := \pi^{-1}(\bar{K}_i)$ pour tout $i = 1, \dots, s$. Par la bijection classique entre sous-groupes de G/H et sous-groupes de G contenant H, on sait que K_i est un sous-groupe distingué de G contenant H, que $\bar{K}_i \simeq K_i/H$ et (d'après le troisième théorème d'isomorphisme) que $K_{i-1}/K_i \simeq \bar{K}_{i-1}/\bar{K}_i = Q_i$. Maintenant considérons $H =: K_{s+1} \rhd \cdots \rhd K_n \rhd \{1\}$ une suite de composition pour H, et notons $Q_i = K_{i-1}/K_i$ pour $i = s+1, \dots, n$. Dans la suite $G \rhd K_1 \cdots \rhd K_s \rhd K_{s+1} = H \rhd \cdots \rhd K_n \rhd \{1\}$, les quotients K_{i-1}/K_i sont tous simples donc il s'agit d'une suite de composition. De plus, la liste des quotients est $\mathbf{JH}(G) = \{\{Q_1, \dots, Q_s, Q_{s+1}, \dots, Q_n\}\}$ qui est égale à la réunion (au sens des multiensembles, c'est-à-dire la concaténation) de $\{\{Q_1, \dots, Q_s\}\}$ et $\{\{Q_{s+1}, \dots, Q_n\}\}$, c'est-à-dire $\mathbf{JH}(G/H) \cup \mathbf{JH}(H)$.

3. (2pts) Considérons le sous-groupe distingué $H = \mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_{11})$. Son centre Z, composé des homothéties, est isomorphe à $\mu_3(\mathbb{F}_{11})$. Comme $\mathrm{pgcd}(3, 10) = 1$, ce groupe est trivial. Il s'ensuit que $H \simeq H/Z = \mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_{11})$ qui est simple, par théorème du cours. Par ailleurs le groupe multiplicatif de $\mathbb{F}_{11}$ est cyclique de cardinal 10, donc isomorphe par le théorème des restes chinois à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Le déterminant fournit un isomorphisme $G/H \simeq \mathbb{F}_{11}^\times \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. En

appliquant le résultat de la question précédente on obtient :

$$\mathbf{JH}(G) = \mathbf{JH}(G/H) \cup \mathbf{JH}(H) = \{\{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_{11})\}\}.$$

4. (1pt) Si un groupe possède une suite de composition, il est résoluble ssi ses facteurs de Jordan-Hölder sont abéliens. Il s'ensuit que A_4 est résoluble mais $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_{11})$ ne l'est pas (on note que $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_{11}) = \mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_{11})$ n'est pas abélien puisque son centre est trivial).

Exercice 4 (4 points)

1. (2pts) Soit $\tau_0 = (1,2)$. Toute autre transposition τ lui est conjuguée dans $\mathfrak{S}_n$, i.e. il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\tau = \sigma\tau_0\sigma^{-1}$. Comme $\{\pm 1\}$ est commutatif, on a $f(\tau) = f(\sigma)f(\tau_0)f(\sigma)^{-1} = f(\tau_0)$. Comme les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$, le morphisme f est déterminé par la valeur qu'il prend sur elles, donc si $f(\tau_0) = 1$ alors f est le morphisme trivial et si $f(\tau_0)$ alors f est la signature.

2. (2pts) Soit $a \in \mathfrak{S}_n \setminus G$. Les deux partitions de $\mathfrak{S}_n$ en classes à gauche ou à droite modulo G s'écrivent $\mathfrak{S}_n = G \amalg Ga = G \amalg aG$. Ceci démontre que $aG = Ga$, donc $aGa^{-1} = G$. Ainsi le normalisateur N de G dans $\mathfrak{S}_n$ contient G (évidemment) et a, donc $G \subsetneq N \subset \mathfrak{S}_n$. Comme $[\mathfrak{S}_n : G] = 2$, nécessairement $N = \mathfrak{S}_n$ donc G est distingué. Le morphisme de quotient $f : \mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_n/G \simeq \{\pm 1\}$ est surjectif donc il n'est pas trivial, et la question précédente montre que c'est la signature, donc $G = \ker(f) = \mathfrak{A}_n$.

Exercice 5 (7 points)

1. (1pt) Il est clair que $\mathrm{Id}_E \in F(H)$. De plus, si $u, v \in F(H)$ et $h \in H$, on a $u(h) = v(h) = h$, donc $(uv^{-1})(h) = h$, donc $uv^{-1} \in F(H)$. Ceci montre que $F(H)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$. Enfin $T(H)$ est une intersection de deux sous-groupes donc c'est un sous-groupe.

2. (1pt) Le sous-groupe $T(H) \subset F(H)$ est le noyau du morphisme $\det_{|F(H)} : F(H) \to k^\times$ donc il est distingué. Vérifions que $\det_{|F(H)}$ est surjectif. Soit $\lambda \in k^\times$ Choisissons une droite D supplémentaire de H et un vecteur directeur $a \in D$. L'endomorphisme diagonalisable $u : E \to E$ tel que $u_{|H} = \mathrm{Id}_H$ et $u(a) = \lambda a$ est de déterminant λ, d'où la surjectivité attendue. Il s'ensuit par passage au quotient un isomorphisme $\overline{\det}_{|F(H)} : F(H)/T(H) \xrightarrow{\sim} k^\times$.

3. (2pts) Comme $a \notin H$, on a une décomposition $E = H \oplus \langle a \rangle$. Pour tout $u \in \mathrm{GL}(E)$ il existe donc $\lambda \in k$ et $h \in H$ tels que $u(a) = \lambda a + h$. Si $u \in F(H)$, en écrivant la matrice de u dans une base de la forme $\mathcal{B} = \{\text{base de } H\} \cup \{a\}$ on trouve $\det(u) = \lambda$. Ceci signifie que $u \in T(H)$ ssi $\lambda = 1$, donc $u(a) - a = h \in H$. Ceci montre que l'application φ de l'énoncé est bien définie.

Cette application est un morphisme de groupes car, si $u, v \in T(H)$ et $h := u(a) - a$, $k := v(a) - a$ on a :

$$\varphi(uv) = (uv)(a) - a = u(a) + u(k) - a = a + h + k - a = h + k = \varphi(u) + \varphi(v).$$

L'application φ est bijective car pour tout $h \in H$, compte tenu de la décomposition $E = H \oplus \langle a \rangle$ il existe un unique endomorphisme u tel que $u_{|H} = \mathrm{Id}_H$ et $u(a) = a + h$. On a montré que φ est un isomorphisme de groupes.

4. (a) (1pt) Puisque $T(H)$ est distingué dans $F(H)$ (question 2), il est stable par conjugaison par des éléments de $F(H)$. Ainsi $F(H)$ agit par conjugaison sur $T(H)$, et il s'agit d'une action par morphismes de groupes i.e. donnée par un morphisme $\rho : F(H) \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(T(H))$. Comme $T(H)$ est abélien (question 3), l'action du sous-groupe $T(H) \subset F(H)$ sur $T(H)$ est triviale. Ceci signifie que $T(H) \subset \ker(\rho)$, donc ρ passe au quotient en un morphisme $\bar{\rho} : Q \to \mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(T(H))$, c'est une action de Q sur $T(H)$.

4. (b) (1pt) Traduisons cette action via les isomorphismes $Q \simeq k^\times$ et $T(H) \simeq H$ obtenus précédemment. Soient $\lambda \in k^\times$ et $h \in H$. On relève λ en un $u \in F(H)$, n'importe quel choix convient, par exemple l'endomorphisme $u \in F(H)$ tel que $u(a) = \lambda a$. On note τ_h l'unique endomorphisme de $T(H)$ tel que $\tau_h(a) = a + h$, comme dans la question 3. Alors l'action de λ sur h est donnée par le conjugué $u\tau_h u^{-1}$, qui est déterminé par son action sur a :

$$(u\tau_h u^{-1})(a) = u(\tau_h(\lambda^{-1}a)) = \lambda^{-1}u(a+h) = \lambda^{-1}(\lambda a + h) = a + \lambda^{-1}h.$$

On voit que $u\tau_h u^{-1} = \tau_{\lambda^{-1}h}$, donc l'action est donnée par $\lambda \cdot h = \lambda^{-1}h$. En d'autres termes l'action de $k^\times$ sur H se fait par l'inverse de la loi externe naturelle de H.

5. (1pt) La réponse est oui : l'ensemble L des endomorphismes $u \in F(H)$ tels que $u(a) \in \langle a \rangle$, c'est-à-dire que $u(a) = \lambda a$ pour un certain $\lambda \in k^\times$, est un sous-groupe de $F(H)$ tel que $\det_{|L} : L \to k^\times$ est un isomorphisme. Ceci implique (après une petite vérification) que $L \cap T(H) = \{1\}$ et $LT(H) = F(H)$. Ainsi $F(H)$ est le produit semi-direct interne $T(H) \rtimes L$.