Théorie des Groupes et Géométrie

Contrôle continu n°1
Vendredi 21 octobre 2022
2 heures

Il n'est pas nécessaire de faire l'intégralité du contrôle pour avoir la note maximale.
Les documents et les téléphones sont interdits.

Composer les exercices 1, 2, 3 sur une copie n°1 qui sera corrigée par M. Romagny

Exercice 1, environ sur 3 points

Soient G un groupe fini non trivial et p un nombre premier.

1. Démontrez que si G a un cardinal multiple de p, il possède un élément d'ordre p.
   On pourra faire agir le groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur l'ensemble des $(x_1, \dots, x_p) \in G^p$ tels que $x_1 \cdots x_p = 1$.
2. Déduisez-en que si tout élément est d'ordre une puissance de p, alors G est un p-groupe.

Exercice 2, environ sur 5 points

Soient k un corps, $n \geq 2$ un entier et $G = \mathrm{GL}_n(k)$ le groupe linéaire. On s'intéresse au sous-groupe H *engendré par* les matrices diagonalisables.

1. On suppose que $k = \mathbb{F}_2$. Montrez qu'alors $H = \{1\}$.
2. On suppose que $k \neq \mathbb{F}_2$, donc il existe un élément $a \in k$ distinct de 0 et 1. On pose :

$$D = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_{n-2} & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix} \end{array}\right) \quad , \quad U = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_{n-2} & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \end{array}\right).$$

   (a) Montrez que D et $D^{-1}U$ sont diagonalisables et déduisez-en que H contient une transvection.
   (b) Montrez que $H = \mathrm{GL}_n(k)$.

Exercice 3, environ sur 6 points

Soit G un groupe qui possède une suite de composition :

$$(\mathscr{S}) \qquad G = G_0 \rhd G_1 \rhd \cdots \rhd G_{n-1} \rhd G_n = \{1\}, \quad \text{avec les } Q_i := G_{i-1}/G_i \text{ simples.}$$

On appelle *suite des facteurs de Jordan-Hölder de G* notée $\mathbf{JH}(G) = \{\{Q_1, \dots, Q_n\}\}$ le multiensemble (liste avec multiplicités) des classes d'isomorphisme des quotients Q_i. Cette suite ne dépend pas de $(\mathscr{S})$.

1. Donnez la liste $\mathbf{JH}(G)$ pour le groupe alterné $G = A_4$, ainsi qu'un groupe G' non isomorphe à G ayant même liste. *Les sous-groupes de A_4 et leur structure seront supposés connus.*
2. Montrez que pour tout sous-groupe distingué H on a $\mathbf{JH}(G) = \mathbf{JH}(H) \cup \mathbf{JH}(G/H)$ où dans la réunion de deux multiensembles, on ajoute les multiplicités.
   On pourra relever dans G une suite de composition de G/H.
3. À l'aide de 2, donnez la suite des facteurs de Jordan-Hölder du groupe $G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_{11})$.
4. Les groupes A_4 et $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_{11})$ sont-ils résolubles ?

Composer les exercices 4, 5 sur une copie n°2 qui sera corrigée par S. Rostam

Exercice 4, environ sur 4 points

1. Soit $f : \mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$ un morphisme de groupes. Démontrer que les transpositions ont toutes la même image. En déduire que f est soit constante soit la signature.
2. Soit G un sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_n$. Démontrer que G est distingué puis que $G = \mathfrak{A}_n$.

Exercice 5, environ sur 7 points

Soient k un corps, E un k-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et H un hyperplan de E. On pose $F(H) = \{u \in \mathrm{GL}(E);\ u_{|H} = \mathrm{Id}_H\}$ et $T(H) = F(H) \cap \mathrm{SL}(E)$.

1. Montrez que $F(H)$ et $T(H)$ sont des sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$.
2. Montrez que $T(H)$ est distingué dans $F(H)$ et explicitez le quotient $Q := F(H)/T(H)$.
3. Soit $a \in E$ un vecteur qui n'appartient pas à H. Démontrez que l'application $\varphi : T(H) \to H$, $u \mapsto u(a) - a$ est bien définie et est un isomorphisme de groupes.
4. (a) Démontrez que l'action de $F(H)$ par conjugaison sur $T(H)$ passe au quotient en une action de Q sur $T(H)$.
   (b) En termes des identifications des questions 2 et 3, à quelle action de $k^\times$ sur H celle-ci correspond-elle ?
5. Le groupe $F(H)$ est-il produit semi-direct de Q par $T(H)$?