UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Théorie des Groupes et Géométrie

TD n°4

Groupes orthogonaux

Exercice 1 (Actions de SO sur la sphère et l'espace projectif)

1. Montrez que l'action de $\mathrm{SO}_{n+1}(\mathbb{R})$ sur la sphère euclidienne S^n de $\mathbb{R}^{n+1}$ est transitive. Décrivez le stabilisateur d'un vecteur $x \in S^n$; est-il connexe ?
2. Montrez que l'action de $\mathrm{SO}_{n+1}(\mathbb{R})$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est transitive. Décrivez le stabilisateur d'un point $x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$; est-il connexe ?

Exercice 2 (Décomposition de Choleski et décomposition QR)

Dans cet exercice on étudie deux décompositions matricielles classiques qui sont des conséquences du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. On note $\mathrm{SDP}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives et $T_n^+(\mathbb{R})$ le groupe des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs.

1. (Décomposition de Choleski) En utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, démontrez que pour toute matrice $A \in \mathrm{SDP}_n(\mathbb{R})$ il existe une unique matrice $T \in T_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^{\mathrm{t}}TT$.
2. (Décomposition QR) En utilisant la décomposition de Choleski, démontrez que pour toute matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ il existe un unique couple $(Q,R) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times T_n^+(\mathbb{R})$ tel que $M = QR$.

Remarque : on peut montrer que les applications

$$T_n^+(\mathbb{R}) \to \mathrm{SDP}_n(\mathbb{R}),\ T \mapsto {}^{\mathrm{t}}TT \quad \text{et} \quad \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times T_n^+(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ (Q,R) \mapsto QR$$

sont des homéomorphismes.

3. (Inégalité de Hadamard) Démontrez que pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ on a $|\det(A)| \leq \prod_{j=1}^n ||C_j||$ où $||C_j||$ désigne la norme euclidienne de la j-ième colonne de A.
(*Indication : considérer la décomposition de Choleski de $B := {}^{\mathrm{t}}AA$ et en particulier les coefficients diagonaux de B.*)

Exercice 3 (Sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$)

Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On note $(-,-)$ le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$ et pour toute paire de vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$ on pose $\langle x,y\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(gx,gy)$.

1. Démontrez que $\langle -,-\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
2. Démontrez que $\langle -,-\rangle$ est G-invariant, au sens où $\langle gx,gy\rangle = \langle x,y\rangle$ pour tous $x,y \in \mathbb{R}^n$ et $g \in G$.
3. Déduisez-en que G est inclus dans un conjugué de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Remarque : si G est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, une variante de cette méthode, utilisant l'intégration pour la *mesure de Haar* de G au lieu de la sommation $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}$ permet de montrer que G est inclus dans un conjugué de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.