UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Théorie des Groupes et Géométrie

TD n°3 : Géométrie affine, géométrie projective

Géométrie affine

Exercice 1 (Sous-espaces parallèles)

1. Montrer que dans un espace affine $\mathcal{E}$, deux sous-espaces parallèles sont disjoints ou égaux.
2. Montrer que si $\dim \mathcal{E} = 2$ alors deux droites affines disjointes sont parallèles.
3. Donner un exemple de deux droites de $\mathbb{R}^3$ disjointes et non-parallèles.

Exercice 2 (Sous-espaces dont les directions engendrent E)

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines d'un espace affine $\mathcal{E}$, dirigés respectivement par F, G et E. On suppose que $F + G = E$. Montrer que tout sous-espace parallèle à $\mathcal{G}$ rencontre $\mathcal{F}$.

Exercice 3 (Images et images réciproques de sous-espaces)

1. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ une application affine. Montrer que l'image d'un sous-espace affine $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est un sous-espace affine. Montrer que l'image réciproque d'un sous-espace affine $\mathcal{F}' \subset \mathcal{E}'$ est soit vide, soit un sous-espace affine.
2. Montrer qu'une application affine envoie 3 points alignés sur 3 points alignés.

Exercice 4 (Repères affines)

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et soit $n := \dim \mathcal{E}$. On dit que $A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{E}$ forment un *repère affine* de $\mathcal{E}$ si la famille $\left(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}\right)$ est une base de E.

1. On suppose dans cette question uniquement que $n = 2$. Montrer que $A_0, A_1, A_2 \in \mathcal{E}$ forment un repère affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si A_0, A_1, A_2 ne sont pas alignés.
2. Montrer que si une application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ vérifie $f(A_i) = A_i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$ alors $f = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$.

Exercice 5 (Groupe des homothéties et translations)

Montrer que l'ensemble des homothéties et des translations de $\mathcal{E}$ forme un groupe.
(*Attention, il s'agit ici d'homothéties affines alors que l'exercice 4 de la feuille 2 utilisait des homothéties linéaires.*)

Exercice 6 (Structure affine sur l'ensemble des supplémentaires d'un sous-espace vectoriel)

Soient E un espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Le but de l'exercice est de montrer que l'ensemble $\mathscr{S}$ des supplémentaires de F dans E est muni d'une structure d'espace affine de direction $S = \mathscr{L}(E/F, F)$.

1. On note $\pi : E \to E/F$ la projection canonique et $\mathscr{S}'$ l'ensemble des *sections* de π, c'est-à-dire les applications linéaires $s : E/F \to E$ telles que $\pi \circ s = \mathrm{Id}_{E/F}$. Construisez une bijection $\mathscr{S} \xrightarrow{\sim} \mathscr{S}'$:
   (a) Si $G \xhookrightarrow{i} E$ est un supplémentaire de F, montrez que $\pi_{|G}$ est un isomorphisme et $s := i \circ \pi_{|G}^{-1}$ une section de π ;
   (b) Si s est une section de π, montrez que $G = \mathrm{im}(s)$ est un supplémentaire de F.

On est ramené à montrer que $\mathscr{S}'$ est muni d'une structure d'espace affine.

2. Montrez que le noyau de l'application $\Phi : \mathscr{L}(E/F, E) \to \mathscr{L}(E/F, E/F)$, $s \mapsto \pi \circ s$ est égal à $S = \mathscr{L}(E/F, F)$.
3. Montrez que $\mathscr{S}' = \Phi^{-1}(\mathrm{Id})$ et déduisez-en que $\mathscr{S}'$ est muni d'une structure d'espace affine de direction S.

Exercice 7 (Structure affine sur $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$)

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines de directions respectives E et F.

1. Montrez que l'ensemble des applications affines $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, F)$ est un espace vectoriel de manière naturelle.
2. Montrez que l'ensemble des applications affines $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ est un espace affine de direction $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}, F)$.

Espace projectif

Exercice 8 (Points et droites de l'espace projectif)

1. Déterminer le nombre de points de $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$.
2. On suppose $n \geqslant 1$. Déterminer le nombre de droites de $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ (on pourra utiliser une action transitive bien choisie).
3. Représenter les éléments de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$ et tracer les droites. On parle du *plan de Fano*.
4. Le Dobble est un jeu constitué de 55 cartes, chacune d'entre elles comportant huit symboles différents. Chaque carte a un unique symbole en commun avec chacune autre, le but du jeu est d'être le premier à trouver le symbole commun entre deux cartes données.
   (a) Voici deux cartes de Dobble. Quel est leur symbole commun ?
   (b) Expliquer comment construire un jeu de Dobble.

Exercice 9 (Droite projective réelle)

Justifier que $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est homéomorphe à la sphère unité $\mathbb{S}^1$ de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10 (Un peu de topologie)

Soit k un corps et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que l'on a une bijection $\mathbb{P}^n(k) \simeq k^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1}(k)$.
2. Dans cette union disjointe, que représente $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ pour $\mathbb{P}^n(k)$?

On suppose maintenant que $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3. Rappeler pourquoi $\mathbb{P}^n(k)$ hérite sa topologie de la sphère unité $\mathbb{S}^n$ de k^{n+1}.
4. Montrer que ses espaces sont compacts et connexes par arcs.
5. Montrer que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est homéomorphe à la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$.
6. Montrer que $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ privé d'une droite est homéomorphe à un disque ouvert.

Envoi à l'infini

Exercice 11 (Un peu de dessin)

Soit Δ un triangle d'un plan projectif réel. Représenter Δ après avoir envoyé à l'infini :

1. seulement un sommet ;
2. un côté ;
3. une droite rencontrant l'intérieur de Δ.

Soit Q un quadrilatère d'un plan projectif réel. Représenter Q après avoir envoyé à l'infini :

4. seulement un sommet ;
5. seulement un côté ;
6. seulement une diagonale.

Exercice 12 (Théorème de Desargues)

Soit abc et $a'b'c'$ deux triangles. Soient u, v, w les points d'intersection des droites bc et $b'c'$, ca et $c'a'$, ab et $a'b'$.

1. Faire un dessin.
2. Montrer que les points u, v, w sont alignés si et seulement si les droites aa', bb' et cc' sont concourantes.

Exercice 13

Soit d_0, d_1, d, d' 4 droites concourantes en un point m. Soit $o \neq m$ un point de d_1. Soient $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ deux droites concourantes en o (et distincts de d_1). On note $A_i = \mathcal{D}_i \cap d$ et $A'_i = \mathcal{D}_i \cap d'$. En envoyant une droite à l'infini et en utilisant le birapport, redémontrer le théorème de Thalès.

Homographies

Exercice 14 (Repère projectif d'une droite)

Soit E un k-espace vectoriel et soit $f \in \mathrm{GL}(E)$. On pose $\phi \coloneqq \mathbb{P}(f)$.

1. Pour l'application f, que dire d'un point fixe de ϕ ?
2. On suppose que $\dim \mathbb{P}(E) = 1$. Si ϕ admet trois points fixes, montrer que $\phi = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}(E)}$.

Exercice 15 (Points fixes)

On suppose que $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie et soit $h : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E)$ une homographie.

1. On suppose que $k = \mathbb{C}$. Montrer que h possède un point fixe.
2. On suppose que $k = \mathbb{R}$ et $\dim E$ est impair. Montrer que h possède un point fixe.
3. Trouver un contre-exemple à la question précédente si $k = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$.

Exercice 16 (Quelques isomorphismes exceptionnels)

Soit E un k-espace vectoriel de dimension au moins 1.

1. Montrer qu'on a des morphismes de groupe $\mathrm{SL}(E) \to \mathrm{GL}(E) \to \mathfrak{S}\big(\mathbb{P}(E)\big)$. Déterminer le noyau.
2. Rappeler les définitions de $\mathrm{PGL}(E)$ et $\mathrm{PSL}(E)$. Sur quel ensemble ces groupes agissent-ils naturellement ? Que dire de l'action ses groupes sur $\mathbb{P}(E)$?
3. Montrer les isomorphismes $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$.
4. Montrer les isomorphismes $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_4$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{A}_4$.
5. Montrer les isomorphismes $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathfrak{A}_5$.

Il existe d'autres isomorphismes exceptionnels, voir Perrin fin du chapitre IV.

Exercice 17 (Constructions à la règle)

Soient M un point et d, d' deux droites du plan affine.

1. On suppose que d et d' sont parallèles. Construire à la règle non graduée uniquement la droite (unique) passant par M parallèle à d.
2. On suppose que d et d' sont sécantes en un point N. Construire à la règle non graduée uniquement la droite (MN) lorsque N est en dehors de la feuille ou du tableau ?

Exercice 18 (Image par une homographie)

Soit A, B, C trois points alignés et A', B', C' 3 points alignés sur une autre droite. Soit φ l'unique homographie qui envoie $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$ et $C \mapsto C'$. Construire $D' = \varphi(D)$ l'image de D un point de la droite (AB). On pourra écrire φ comme un produit de deux perspectives.

Exercice 19 (Images des sommets d'un hexagone)

Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier et soit h une homographie de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dans lui-même.

1. Étant données les images A', B', D', E' des points A, B, D, E respectivement, construire les images des points restants.
2. Même question en supposant cette fois données les images A', B', C', D' des points A, B, C, D.

Birapport

Exercice 20 (Division harmonique)

Soient A, B, C, D quatre points d'une droite affine réelle en division harmonique. Montrer qu'un et un seul des points C et D se trouve à l'intérieur du segment $[AB]$.

Exercice 21 (Droites concourantes)

Soient (O, A, B, C) et (O, A', B', C') deux quadruplets de points distincts et alignés. Montrer que les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes si et seulement si $[O, A, B, C] = [O, A', B', C']$.

Exercice 22 (Quelques identités)

1. Trouver les homographies de $\mathbb{P}^1(k)$ qui fixent 1 et qui échangent 0 et ∞.
2. En déduire une preuve sans calcul de l'égalité $[b, a, c, d] = [a, b, c, d]^{-1}$.
3. Prouver de même les égalités $[a, b, d, c] = [a, b, c, d]^{-1}$ et $[a, c, b, d] = 1 - [a, b, c, d]$.

Exercice 23 (Moins de monde que prévu !)

On considère l'action de $\mathfrak{S}_4$ sur les quadruplets et soient a, b, c, d quatre points alignés.

1. Déterminer l'orbite du birapport $[a, b, c, d]$ sous l'action de $\mathfrak{S}_4$.
2. Montrer que le stabilisateur de $[a, b, c, d]$ est en général le sous-groupe $V \subseteq \mathfrak{S}_4$ engendré par les doubles transpositions.

Exercice 24 (Une autre identité)

Soient a, b, m, n, p cinq points distincts d'une droite projective. Montrer l'égalité :

$$[a, b, m, n][a, b, n, p][a, b, p, m] = 1.$$

Droite projective complexe

Exercice 25 (Image de parties du plan)

Déterminer :

1. l'image de $\mathbb{R}^2_{>0}$ par $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$;
2. l'image de $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ et } \mathrm{Im}(z) > 0\}$ par $z \mapsto \frac{2z-i}{2+iz}$;
3. l'image de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2_{>0} : y < x\}$ par $z \mapsto \frac{z}{z-1}$;
4. l'image de $]0, 1[\times\mathbb{R}$ par $z \mapsto \frac{z-1}{z}$ puis par $z \mapsto \frac{z-1}{z-2}$.

Exercice 26 (Théorème des six birapports)

Soient $a, b, c, d, a', b,', c', d'$ 8 points d'une droite projective.

1. Dessiner un cube en disposant les points $a, b, c, d, a', b', c', d'$ afin que les six faces du cubes soient :

$$\{a, b, c', d'\}, \{b, c, a', d'\}, \{c, a, b', d'\}, \{a', b', c, d\}, \{b', c', a, d\}, \{c', a', b, d\}.$$

2. Montrer l'égalité $[a, b, c', d'][b, c, a', d'][c, a, b', d'][a', b', c, d][b', c', a, d][c', a', b, d] = 1$.
3. En déduire le Théorème de Miquel : Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$ tels que $\sharp\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_{i+1} = 2$, pour $i = 1, \ldots, 4$, on note ses deux points A_i, A_i'. Supposons que les non-prime et les prime sont au bon endroit. Les $A_1, \ldots, A_4$ sont cocycliques ou alignés si et seulement si les points $A_1', \ldots, A_4'$ sont cocycliques ou alignés.
4. En déduire le Théorème de Simson : Soit ABC un triangle. Soit M un point du plan euclidien. On note P, Q, R les projetés orthogonaux de M sur les droites $(AB), (BC), (CA)$. Les points P, Q, R sont alignés si et seulement si M est sur le circonscrit à ABC.

   Voir l'exercice III.34 du livre *Géométrie* de M. Audin pour une troisième application.