UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Théorie des Groupes et Géométrie

TD n°2

Produit semi-direct

Exercice 1 (Holomorphe d'un groupe)

On appelle *holomorphe* d'un groupe de G le produit semi-direct $\mathrm{Hol}(G) = G \rtimes_\varphi \mathrm{Aut}(G)$ défini par l'action tautologique $\varphi = \mathrm{Id} : \mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{Aut}(G)$ de $\mathrm{Aut}(G)$ sur G. Écrivez les formules décrivant le produit et l'inverse dans $\mathrm{Hol}(G)$.

Exercice 2 (Sur-groupes et conjugaisons)

1. Soient G un groupe et $f : G \to G$ un automorphisme. Montrez qu'il existe un sur-groupe $G' \supset G$ tel que f est la restriction à G d'un automorphisme intérieur (ou conjugaison) de G'.
On pourra prendre pour G' l'holomorphe $\mathrm{Hol}(G) = G \rtimes \mathrm{Aut}(G)$.

2. Soient G un groupe fini et $x, y \in G$ deux éléments de même ordre. Montrez qu'il existe un sur-groupe $G' \supset G$ tel que x et y sont conjugués dans G'.
On pourra prendre pour G' le groupe symétrique $\mathfrak{S}_G$.

Exercice 3 (Automorphismes du groupe diédral)

Soit $n \geq 3$ et $\mathbb{D}_n$ le groupe diédral engendré par deux élements r, s satisfaisant les relations $r^n = s^2 = (rs)^2 = 1$.

1. On rappelle que tout élément $x \in \mathbb{D}_n$ peut s'écrire d'une unique manière sous la forme $x = s^\epsilon r^i$ avec $\epsilon \in \{0,1\}$ et $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Montrez que le produit de $x = s^\epsilon r^i$ avec $y = s^\eta r^j$ est donné par la formule $xy = s^{\epsilon+\eta} r^{(1-2\eta)i+j}$.

2. Montrez que pour tout morphisme de groupes $f : \mathbb{D}_n \to H$, les éléments $R = f(r)$ et $S = f(s)$ vérifient les relations $R^n = S^2 = (RS)^2 = 1$. Réciproquement montrez que pour tout couple $(R, S) \in H^2$ tel que $R^n = S^2 = (RS)^2 = 1$ il existe un unique morphisme de groupes $f : \mathbb{D}_n \to H$ tel que $f(r) = R$ et $f(s) = S$.

3. Déduisez de la question précédente que les automorphismes $f : \mathbb{D}_n \to \mathbb{D}_n$ sont les morphismes $f = f_{i,j}$ déterminés par $f(r) = r^i$ et $f(s) = sr^j$, pour $i \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ et $j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

4. Montrez que $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}_n)$ est l'holomorphe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
On pourra montrer que $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}_n) = N \rtimes H$ *avec* $N = \{f_{1,j};\ j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ *et* $H := \{f_{i,0};\ i \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\}$.

Exercice 4 (Groupe affine d'un espace vectoriel)

Soit E un espace vectoriel sur un corps k. On appelle *groupe affine de E* noté $\mathrm{GA}(E)$ l'ensemble des bijections $f : G \to G$ de la forme $f(x) = a(x) + b$ avec $a \in \mathrm{GL}(E)$ et $b \in E$.

1. Dans $\mathrm{GA}(E)$, décrivez le produit et l'inverse.

2. Montrez que $\mathrm{GA}(E)$ est produit semi-direct du sous-groupe distingué T des translations ($a = \mathrm{Id}$) et du sous-groupe L des applications linéaires ($b = 0$). Quel est le morphisme d'action de L sur T ?

3. On appelle *homothétie-translation* un morphisme qui est le composé d'une homothétie et d'une translation. Montrez que les homothéties-translations forment un sous-groupe.

Exercice 5 (PSL et PGL)

On note $e_n : k^\times \to k^\times$ l'application donnée par $e_n(x) = x^n$, ainsi que $\mu_n(k)$ son noyau et $k^{\times n}$ son iumage. On note Z le centre de $\mathrm{GL}_n(k)$. On rappelle que $\mu_n(\mathbb{F}_q)$ est un groupe cyclique d'ordre $n \wedge (q-1)$.

1. Rappeler pourquoi le noyau du morphisme canonique $\varphi : \mathrm{SL}_n(k) \to \mathrm{PGL}_n(k)$ est $\mu_n(k)$.

2. Montrer que le morphisme $\det : \mathrm{GL}_n(k) \to k^\times$ induit un morphisme surjectif $\det : \mathrm{PGL}_n(k) \to k^\times / k^{\times n}$ de noyau $\mathrm{PSL}_n(k)$.

3. Montrer que le morphisme canonique $\mathrm{SL}_n(k) \to \mathrm{PGL}_n(k)$ est un isomorphisme si et seulement si e_n est un isomorphisme.

4. Pour $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_q, \mathbb{Q}$, $n \geqslant 2$ discuter l'assertion $e_n : k^\times \to k^\times$ est un isomorphisme.

Exercice 6 (PSL et PGL, suite)

À l'aide de l'exercice 5, montrer que :

1. Si k est algébriquement clos alors l'inclusion $\mathrm{PSL}_n(k) \to \mathrm{PGL}_n(k)$ est un isomorphisme.

2. Si $k = \mathbb{R}$ et n est impair alors l'inclusion $\mathrm{PSL}_n(k) \to \mathrm{PGL}_n(k)$ est un isomorphisme.

3. Si $k = \mathbb{R}$ et n est pair alors l'image de inclusion $\mathrm{PSL}_n(k) \to \mathrm{PGL}_n(k)$ est d'indice 2.

4. Si k est un corps fini alors l'image de inclusion $\mathrm{PSL}_n(k) \to \mathrm{PGL}_n(k)$ est d'indice $n \wedge (q-1)$. En particulier, d'indice 2 si $n = 2$ et k de caractéristique différente de 2.

Exercice 7 (GL_n n'est pas souvent un produit direct de SL_n)

On rappelle que $\mathrm{SL}_n(k)$ *possède un complément dans* $\mathrm{GL}_n(k)$*, c'est-à-dire un sous-groupe* $H' \subset \mathrm{GL}_n(k)$ *tel que :*

$$H' \cap \mathrm{SL}_n(k) = 1 \quad \textit{et} \quad H' \,\mathrm{SL}_n(k) = \mathrm{GL}_n(k)$$

ou de façon équivalente : $\mathrm{GL}_n(k) = \mathrm{SL}_n(k) \rtimes H'$*. On cherche une condition nécessaire et suffisante sur* (n, k) *pour qu'il existe un complément tel que ce produit est en fait* direct*.*

On suppose qu'il existe un sous-groupe $H \subset \mathrm{GL}_n(k)$ tel que $\mathrm{GL}_n(k) = \mathrm{SL}_n(k) \times H$, ou de façon équivalente :

$$H \cap \mathrm{SL}_n(k) = 1, \quad H\,\mathrm{SL}_n(k) = \mathrm{GL}_n(k), \quad [H, \mathrm{SL}_n(k)] = 1.$$

1. Montrer que le déterminant induit un isomorphisme de H sur $k^\times$.

2. Montrer que $H \subset Z \coloneqq Z\big(\mathrm{GL}_n(k)\big)$.

3. Montrer que Z est un complément de $\mathrm{SL}_n(k)$ si et seulement si l'application déterminant de Z vers $k^\times$ est un isomorphisme.

4. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur k et n pour qu'il existe un tel H.

Espaces homogènes

Exercice 8 (Bases d'un espace vectoriel)

Montrez que l'ensemble des bases d'un espace vectoriel de dimension finie E est un espace principal homogène sous $\mathrm{GL}(E)$.

Exercice 9 (Classes à gauche versus classes à droite)

Soient G un groupe et H un sous-groupe. On note G/H le quotient de G par la relation d'équivalence définie par la multiplication à *droite* par des éléments de H, i.e. $g' \sim g$ ssi il existe $h \in \mathrm{H}$ tel que $g' = gh$. On note H\G le quotient par la relation d'équivalence de multiplication à *gauche* par des éléments de H. Produisez une bijection entre G/H et H\G.

Exercice 10 (Topologie quotient sur un espace homogène)

On appelle *groupe topologique* un groupe G muni d'une topologie telle que la multiplication $m : G \times G \to G$ et l'inversion $\mathrm{inv} : G \to G$ sont continues. Soit H un sous-groupe et $\pi : G \to G/H$ la projection vers le quotient de G par H agissant par multiplication à droite. On munit G/H de la topologie telle que : $V \subset G/H$ est ouvert ssi $\pi^{-1}(V)$ est ouvert.

1. Démontrez que π est continue.

2. Démontrez que π est ouverte (i.e l'image de tout ouvert est un ouvert).

3. Démontrez que si Y est un espace topologique et $f : G \to Y$ une application continue constante sur les classes modulo H, alors l'application induite $\bar{f} : G/H \to Y$ est continue.

4. Démontrez que si H et G/H sont connexes, alors G est connexe.
Indication : il suffit de montrer que toute application continue $f : G \to \{0, 1\}$ *est constante.*

Exercice 11 (La sphère)

On note $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la sphère euclidienne de dimension n.

1. Montrez que le groupe $\mathrm{SO}_{n+1}(\mathbb{R})$ des *déplacements* (isométries de déterminant 1) de $\mathbb{R}^{n+1}$ agit transitivement sur S^n.

2. Décrivez les stabilisateurs des points.

3. Utilisant la relation stabilisateur-orbite et l'exercice 10, démontrez par récurrence sur n que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe.

Transvections

Dans les exercices qui suivent, E est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k. De plus, pour toute forme non nulle $f \in E^*$ et tout vecteur non nul $a \in \ker(f)$ on note $u_{a,f}$ la transvection définie par $u(x) = x + f(x)a$.

Exercice 12 (Transvections d'hyperplan fixé)

Soit H un hyperplan de E. On note $\mathrm{T}(H)$ la réunion de l'ensemble des transvections d'hyperplan H et de l'identité.

1. Démontrez que $\mathrm{T}(H) = \{u \in \mathrm{SL}(E); u_{|H} = \mathrm{Id}_H\}$ et que c'est un sous-groupe de $\mathrm{SL}(E)$. Donnez une représentation matricielle de $\mathrm{T}(H)$ dans une base bien choisie.

2. Démontrez que pour toute forme linéaire f_0 de noyau H, l'application $a \mapsto u_{a,f_0}$ induit un isomorphisme de groupes $H \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}(H)$.

Exercice 13 (Transvections de droite fixée)

Soit D une droite de E. On note $\mathrm{U}(D)$ la réunion de l'ensemble des transvections de droite D et de l'identité.

1. Démontrez que $\mathrm{U}(D) = \{u \in \mathrm{SL}(E); \mathrm{im}(u - \mathrm{Id}) \subset D\}$ et que c'est un sous-groupe de $\mathrm{SL}(E)$. Donnez une représentation matricielle de $\mathrm{U}(D)$ dans une base bien choisie.

2. Démontrez que pour tout vecteur directeur a_0 de D, l'application $f \mapsto u_{a_0,f}$ induit un isomorphisme de groupes $D^\perp \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}(D)$, où $D^\perp = \{f \in E^*, f_{|D} = 0\}$ est l'orthogonal de D.

Exercice 14 (Transvections d'hyperplan et droite fixés)

Soient D une droite et H un hyperplan tels que $D \subset H$. On choisit a_0 et f_0 tels que $D = \mathrm{Vect}(a_0)$ et $H = \ker(f_0)$.

1. Démontrez que l'application $\lambda \mapsto u_{\lambda a_0, f_0}$ induit un isomorphisme de groupes $(k, +) \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}(H) \cap \mathrm{U}(D)$.

2. Donnez la représentation matricielle de $\mathrm{T}(H) \cap \mathrm{U}(D)$ lorsque $H = \ker(e_j^*)$ et $D = \mathrm{Vect}(e_i)$, où $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de E et $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ est sa base duale. (*Il s'agit des matrices $T_{i,j}(\lambda)$!*)

Exercice 15 (Connexité par arcs de SL)

Lorsque $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, déduisez du fait que $\mathrm{SL}(E)$ est engendré par les transvections qu'il est connexe par arcs.

Exercice 16 (Dualité pour les transvections)

Pour tout $u \in \mathrm{L}(E)$, on note u^* ou ${}^{\mathrm{t}}u$ la transposée de u, définie par $u^*(\varphi) = \varphi \circ u$.

1. Démontrez que $u : E \to E$ est une transvection d'hyperplan H et de droite D si et seulement si $u^* : E^* \to E^*$ est une transvection d'hyperplan $D^\perp$ et de droite $H^\perp$.

2. Pour souligner la dépendance en E, on utilise maintenant les notations $\mathrm{T}(E, H)$ et $\mathrm{U}(E, D)$ pour les groupes de transvections de $\mathrm{SL}(E)$ introduits dans les exercices 12 et 13. Démontrez qu'on a un isomorphisme de groupes :

$$\begin{aligned} \mathrm{T}(E, H) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{U}(E^*, H^\perp) \\ u &\longmapsto u^*. \end{aligned}$$

3. Vérifiez que les résultats des exercices 12 et 13 se déduisent l'un de l'autre par dualité.

Exercice 17 (Engendrement par les transvections élémentaires)

On fixe une base $\mathcal{B}$ de E. On fait alors les identifications $E = k^n$ et $\mathrm{GL}(E) = \mathrm{GL}_n(k)$. On appelle *matrices de transvection élémentaires* (relativement à la base fixée) les matrices $T_{i,j}(\lambda) = \mathrm{I}_n + \lambda E_{i,j}$ pour $i \neq j$.

1. Quel est l'effet sur une matrice M de la multiplication à gauche, resp. à droite, par $T_{i,j}(\lambda)$?

2. On note $L_1, \ldots, L_n$ les lignes de M. Montrez que la multiplication de M à gauche par $T_{i,j}(1)T_{j,i}(-1)T_{i,j}(1)$ a pour effet de remplacer L_i par L_j et L_j par $-L_i$.

3. En appliquant le pivot de Gauss, montrez que les matrices de transvection élémentaire engendrent $\mathrm{SL}(E)$.

Groupe linéaire sur les corps finis

On considère un espace vectoriel de dimension finie E sur un corps fini k de cardinal q.

Exercice 18 (Décompte des transvections)

1. Pour tout choix d'un vecteur $a \neq 0$ et d'une forme linéaire $f \neq 0$ tels que $f(a) = 0$, on note $u_{a,f}$ la transvection définie par $u(x) = x + f(x)a$. Montrez que $u_{a,f} = u_{a',f'}$ si et seulement s'il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $f' = \lambda f$ et $a' = \lambda^{-1} a$.

2. On note $H = \ker(f)$ et on fixe un vecteur $b \notin H$. Démontrez que le commutant de $u_{a,f}$ dans $\mathrm{GL}(E)$ est l'ensemble des $g \in \mathrm{GL}(E)$ de la forme $g = \lambda v$ avec $\lambda \in k^\times$ et $v \in \mathrm{GL}(E)$ vérifiant $v(a) = a$, $v(H) = H$, $v(b) \in b + H$. La matrice de v dans une base obtenue en complétant une base de H avec b est donc de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & * & \cdots & * & * \\ \hline 0 & & & & * \\ \vdots & & * & & \vdots \\ 0 & & & & * \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

3. Calculez le cardinal de ce commutant et déduisez-en que le nombre de transvections dans $\mathrm{GL}(E)$ vaut :

$$\frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1)}{q - 1}.$$

Exercice 19 (Petites parties génératrices de $\mathrm{SL}(E)$)

On note $\mathbb{F}_q$, avec $q = p^d$ et p premier, un corps fini à q éléments.

1. Combien y a-t-il de matrices transvection élémentaires dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$?

2. Utilisant l'identité $T_{i,j}(\lambda)T_{i,j}(\mu) = T_{i,j}(\lambda + \mu)$, montrez que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ peut être engendré par $d(n^2 - n)$ éléments.

3. Démontrez que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ peut être engendré par les deux éléments $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Exercice 20 (Décompte des automorphismes diagonalisables)

On note E un espace vectoriel de dimension n sur un corps fini à q éléments.

1. Montrez que $f \in \mathrm{GL}(E)$ est diagonalisable si et seulement si $f^{q-1} = \mathrm{Id}$.

On fixe un générateur ζ du groupe multiplicatif cyclique $\mathbb{F}_q^\times$.

2. On pose $E_i = \ker(f - \zeta^i)$, pour $f \in \mathrm{GL}(E)$ et $i = 1, \ldots, q-1$. Montrez que l'application $f \mapsto (E_1, \ldots, E_{q-1})$ établit une bijection entre l'ensemble des automorphismes diagonalisables de $\mathrm{GL}(E)$ et l'ensemble des décompositions de E en somme directe de $q - 1$ sous-espaces.

3. On fixe un $(q-1)$-uplet d'entiers $\nu = (n_1, \ldots, n_{q-1})$ tels que $\sum n_i = n$. On note X_ν l'ensemble des décompositions de E en somme directe de $q - 1$ sous-espaces E_i tels que $\dim(E_i) = n_i$. Montrez que l'action de $\mathrm{GL}(E)$ sur X_ν définie par $g \cdot (E_1, \ldots, E_{q-1}) := (g(E_1), \ldots, g(E_{q-1}))$ est transitive et décrivez le stabilisateur d'un point.

4. Déduisez-en que le nombre d'automorphismes diagonalisables de $\mathrm{GL}(E) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ est égal à :

$$\sum_{\substack{(n_1, \ldots, n_{q-1}) \\ \text{t.q. } n_1 + \cdots + n_{q-1} = n}} \frac{|\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)|}{|\,\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{F}_q)| \ldots |\,\mathrm{GL}_{n_{q-1}}(\mathbb{F}_q)|}\ .$$