Exercice 3 (Lemme de Zassenhaus ou lemme du papillon)

Soient G un groupe et H', H, K', K des sous-groupes tels que $H' \lhd H$ et $K' \lhd K$. Montrez qu'on a un isomorphisme :

$$\frac{H'(H\cap K)}{H'(H\cap K')} \simeq \frac{K'(H\cap K)}{K'(H'\cap K)}.$$

On pourra démontrer que les deux membres sont isomorphes à $(H\cap K)/((H\cap K')(H'\cap K))$.

On part de la composée de morphismes, notée f :

$$f : \underset{\text{(inclusion)}}{H\cap K \hookrightarrow H'.(H\cap K)} \underset{\text{(proj. canonique)}}{\twoheadrightarrow} \frac{H'(H\cap K)}{H'(H\cap K')}.$$

<u>Calcul du noyau de f</u> : un élément de $\ker(f)$ est un $x \in H\cap K$ tel que $x \in H'(H\cap K')$. On peut donc écrire $x = h'y$ avec $\begin{cases} h' \in H' \\ y \in H\cap K' \end{cases}$.

On va montrer que $x \in (H\cap K')(H'\cap K)$. Comme $y \in H\cap K'$, il suffit de montrer que $h' \in H'\cap K$. On sait déjà que $h' \in H'$ et il reste à montrer que $h' \in K$. Or

$$h' = xy^{-1} \in \underbrace{(H\cap K)}_{\text{hypothèse sur } x}.\underbrace{(H\cap K')}_{\text{hypothèse sur } y\text{, vu que } H\cap K' \text{ ss-groupe}} \subset K.K' \underbrace{\subset}_{\text{puisque } K'\subset K} K.K = K \quad \text{cqfd.}$$

Réciproquement si $x \in (H\cap K')(H'\cap K)$, alors

- $x \in H\cap K$ puisque $K' \subset K$ et $H' \subset H$. Ainsi x est dans la source de f
- $x \in H'(H\cap K')$ puisque $H'\cap K \subset H'$, donc $f(x) = 0$ càd $x \in \ker(f)$.

On a montré que $\ker(f) = (H\cap K')(H'\cap K)$.

<u>Vérif. du fait que f est surjective</u>

Tout élément du but de f peut être représenté par un élément $x \in H'(H\cap K)$ et il nous suffit de montrer que, à un élément de $H'(H\cap K')$ près, celui-ci est dans $H\cap K$.

C'est immédiat : on peut écrire $x = h'y$, $h' \in H'$ et $y \in H \cap K$.

Alors $h' \in H' \subset H'(H \cap K')$ donc x a même image que y dans $H'(H \cap K)/H'(H \cap K')$, ce qui signifie que

$$f(y) = \text{classe de } y = \text{classe de } x \quad \text{cqfd.}$$

$$\boxed{\text{Alors } f \text{ induit un \underline{isomorphisme} } \frac{H \cap K}{(H \cap K')(H' \cap K)} \xrightarrow[\alpha]{\sim} \frac{H'(H \cap K)}{H'(H \cap K')}.}$$

En échangeant le rôle de H et K on a un iso

$$\frac{H \cap K}{(H \cap K')(H' \cap K)} \xrightarrow[\beta]{\sim} \frac{K'(H \cap K)}{K'(H' \cap K)}$$

et $\beta \circ \alpha^{-1}$ est l'iso. qui répond à l'exercice.

<u>NB</u> on a omis toutes les vérifications de normalité de sous-groupes qui permettent de justifier que

1) les produits de sous-groupes qui apparaissent sont des sous-groupes (cf. exo. 2)

2) les quotients qui apparaissent sont de légitimes quotients de groupes (par des ss-gr distingués).

Il faudrait le faire !