

## THÉORIE DES GROUPE ET GÉOMÉTRIE

### Organisation

enseignants Matthieu Romagny (cours et TD2)  
Salim Rostam (TD1)

calendrier ven 3 sept → ven 17 déc (15 vendredis)

Congés de Toussaint : 30 oct → 7 nov

semaine profil : 25 oct → 29 oct

évaluation contrôle continu, deux épreuves CC1 22 oct  
CC2 10 déc.

$$\text{note d'UE} = (CC1 + CC2) / 2$$

absence injustifiée : 0

absence justifiée : CC de substitution

**Notez les dates 22/10 et 10/12 ! Soyez présents !**

### Contenu du cours

1. Rappels sur les groupes et les actions de groupes. Résolubilité, simplicité.
2. Groupes symétriques et alternés, familles de générateurs, simplicité.
3. Groupe linéaire, spécial linéaire sur un corps. Familles de générateurs, résolubilité. Drapeaux, décomposition LU, décomposition de Bruhat. Groupes linéaires sur un corps fini, utilisation des inversibles d'une sous-algèbre de matrices pour trouver des sous-groupes de Sylow.
4. Géométrie projective : définitions, structure affine du complémentaire d'un hyperplan, homographies, théorèmes de Thalès, Pappus, Desargues. Dualité.
5. Formes sesquilinéaires et quadratiques : réduction. groupes orthogonaux et symplectiques. Théorème de Witt. Théorème de Cartan-Dieudonné.
6. Formes quadratiques sur  $\mathbb{R}$ . Compacité du groupe orthogonal, sous-groupes fermés (théorème de Cartan) et compacts du groupe linéaire, sous-groupes finis de  $SO(3)$ , polyèdres réguliers. Décompositions de Cartan et d'Iwasawa.

Cette partie  
inclura de  
la géométrie  
vectorielle  
et affine.

Le cours sera composé de six chapitres suivant ce découpage en parties, après un chapitre 0 d'introduction.

Références voici une liste de livres utiles pour ce cours :

Daniel Perrin, Cours d'algèbre, Ellipses.

Michèle Audin, Géométrie, EDP Sciences.

Felix Ulmer, Théorie des groupes, Ellipses.

Josette Calais, Eléments de théorie des groupes, PUF.

Jean Delcourt, Théorie des groupes, Dunod.

Joseph Rotman, An introduction to the theory of groups, Springer.

Jacqueline LeLong-Ferrand, les fondements de la géométrie, PUF.

Benoît Kloeckner, Un bref aperçu de la géométrie projective, Calvage & Mounet

Yves Ladegailerie, Géométrie (affine, projective, euclidienne et analogmatique), Ellipses.

Philippe Caldero et Jérôme Gemoni, Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométrie, Calvage et Mounet

Dany-Jack Mercier, Cours de géométrie : prépa Capes et Agrég, Publibook

Prérequis Je suppose que vous êtes plutôt familiers avec l'algèbre

linéaire et la théorie des groupes de L3. Voici pour mémoire le contenu du cours de th. des gr. de L3 à Rennes en 2020-2021 :

- 1) Notions de base. Groupes, morphismes, sous-groupes, partie génératrice, ordre, théorème de Lagrange.
- 2) Groupes abéliens de type fini. Le groupe  $\mathbb{Z}$ , groupes cycliques, structure des groupes abéliens de type fini.
- 3) Le groupe diédral. Caractérisation par générateurs et relations.
- 4) Sous-groupes normaux. Exemple du noyau d'un morphisme, groupe quotient, factorisation des morphismes, exemple du groupe dérivé.
- 5) Action de groupes. Orbites, stabilisateurs, exemples d'actions, équation aux classes et conséquences.
- 6) Groupe symétrique. Signature, décomposition en produit de cycles, groupe alterné et simplicité.
- 7) Produit semi-direct. Exemple (entre autres) du groupe symétrique  $S_4$ .
- 8) Théorèmes de Sylow. Applications : critère de non-simplicité, classification des groupes d'ordre  $\leq 15$ , d'ordre  $pq$ , etc.