

jacqueline lelong-ferrand

# les fondements de la géométrie



MATHÉMATIQUES

CHAPITRE III / <i>Approfondissement de la structure affine</i> .....	81
1 / Introduction .....	81
Espaces homogènes .....	83
Cas particulier .....	83
2 / Espaces affines .....	84
3 / Sous-espaces affines (ou variétés linéaires affines) .....	86
Autres définitions .....	86
Cas d'un espace vectoriel .....	87
Dimension d'une variété linéaire affine .....	87
Intersection de variétés linéaires affines .....	88
Parallélisme .....	89
Sous-espace affine engendré par une partie $X$ de $\mathcal{G}$ .....	89
4 / Barycentres; application à l'étude des sous-espaces affines .....	90
Application aux variétés linéaires affines .....	92
Une caractérisation des sous-espaces affines .....	94
5 / Applications affines et semi-affines .....	95
Utilisation de repères affines .....	96
Application: équations d'un hyperplan affine ou d'une v.l.a. ....	97
Une caractérisation des applications affines .....	97
Points fixes des applications affines ou semi-affines .....	98
Les groupes affines et semi-affines .....	99
Projections .....	100
Symétries affines .....	100
Théorème de Thalès .....	101
6 / Prolongement canonique d'un espace affine dans un espace vectoriel. Applications .....	102
7 / Applications du théorème de plongement .....	105
Interprétation vectorielle des barycentres .....	105
Interprétation vectorielle des applications affines .....	106
8 / Caractérisation géométrique des applications semi-affines injectives .....	109
Cas du plan .....	111
9 / Le théorème fondamental de la géométrie affine .....	112
CHAPITRE IV / <i>Eléments de géométrie projective</i> .....	117
1 / Introduction .....	117
Problème des projections coniques .....	117
2 / Notion d'espace projectif .....	119
Sous-espaces projectifs .....	120
Coordonnées homogènes .....	121

## Approfondissement de la structure affine

### 1. Introduction.

Pour bien comprendre la structure affine, et ne pas se laisser paralyser par son apparente complexité, il est bon de la replacer dans le cadre plus général des *espaces homogènes* <sup>(1)</sup>. Ce sera aussi l'occasion de rappeler que la notion de groupe est issue, par abstraction, de celle de *groupe de transformations*, et qu'elle ne retrouve sa pleine signification que lorsqu'on fait *agir* le groupe sur un ensemble.

La définition des groupes abstraits étant bien connue, nous poserons

► DÉFINITION 1.1. Soit  $G$  un groupe quelconque noté multiplicativement, et  $e$  son élément neutre.

On dit que  $G$  agit (ou opère) à gauche sur un ensemble  $X$  si on a défini une application  $\varphi : G \times X \rightarrow X$ ,  $(g, x) \mapsto \varphi(g, x)$  telle que les applications  $\varphi_g : X \rightarrow X$ ,  $x \mapsto \varphi(g, x)$  vérifient

$$\varphi_e = \text{Id}_X \text{ et } \forall (g, h) \in G^2 \quad \varphi_g \circ \varphi_h = \varphi_{gh}. \quad (1)$$

De même on dit que  $G$  agit (ou opère) à droite sur  $X$  si on a défini une application  $\psi : X \times G \rightarrow X$ ,  $(x, g) \mapsto \psi(x, g)$  telle que les applications  $\psi_g : X \rightarrow X$ ,  $x \mapsto \psi(x, g)$  vérifient

$$\psi_e = \text{Id}_X \text{ et } \forall (g, h) \in G^2 \quad \psi_g \circ \psi_h = \psi_{gh}. \quad (1')$$

Les relations (1) [resp. (1')] montrent que les  $\varphi_g$  [resp. les  $\psi_g$ ] sont des *bijections* de  $X$  sur  $X$ , et que  $\varphi_g^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$  [resp.  $\psi_g^{-1} = \psi_{g^{-1}}$ ].

1. La lecture de ce § n'est cependant pas indispensable pour la suite.

Par exemple tout groupe  $G$  agit sur lui-même à gauche par *translations gauches* avec  $\varphi_g(x) = gx$ ; et il agit sur lui-même par *translations droites* avec  $\psi_g(x) = xg$ .

Le groupe  $G$  agit aussi sur lui-même à gauche par *automorphismes intérieurs*, avec  $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$ .

Par convention, si le mode d'action d'un groupe sur un ensemble n'est pas précisé, il sera sous-entendu qu'il s'agit d'une *action à gauche*.

Bien entendu, si  $G$  est commutatif, les deux modes d'action coïncident; mais il faut noter qu'un même groupe peut agir de plusieurs manières sur un ensemble, et en particulier, sur lui-même!

DÉFINITION 1.2. Soit  $G$  un groupe agissant à gauche sur un ensemble  $X$  suivant la loi  $\varphi$ . On dit que  $G$  agit *transitivement* sur  $X$  si, pour tout couple  $(x, y)$  de points de  $X$ , il existe *au moins* un élément  $g$  de  $G$  tel que  $y = \varphi(g, x) = \varphi_g(x)$ ; et on dit que l'action de  $G$  est *simplement transitive* si cet élément  $g$  est toujours *unique*.

*Exemple.* Le groupe linéaire  $GL(n, \mathbb{R})$ , formé des automorphismes de  $\mathbb{R}^n$ , agit transitivement sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , mais il n'est simplement transitif que si  $n = 1$ .

DÉFINITION 1.3. Soit  $G$  un groupe agissant à gauche sur un ensemble  $X$ . Le *stabilisateur* d'une partie  $A$  de  $X$  est l'ensemble  $G_A = \{g \in G \mid \varphi_g(A) = A\}$ .

On voit immédiatement que  $G_A$  est un *sous-groupe* de  $G$ . Si  $A$  se réduit à un point  $a$ , ce sous-groupe est appelé le *groupe d'isotropie* de  $a$ .

*Remarque.* Le stabilisateur  $G_A$  est l'intersection des deux ensembles  $G_A^+ = \{g \in G \mid \varphi_g(A) \subset A\}$  et  $G_A^- = \{g \in G \mid \varphi_g(A) \supset A\} = \{g \in G \mid \varphi_g^{-1}(A) \subset A\}$  qui ne sont pas nécessairement des sous-groupes de  $G$ . Par exemple, si  $G = (\mathbb{R}, +)$ , agissant sur lui-même par translations, et si  $A = \mathbb{R}_+$  est le demi-axe positif, on a  $G_A^+ = \mathbb{R}_+$ , qui n'est pas un sous-groupe, et  $G_A^- = \{0\}$ . Pour une étude de  $G_A^+$  voir exercice III.1.

DÉFINITION 1.4. Soit  $G$  un groupe agissant à gauche sur  $X$ ; l'*orbite* d'un point  $a$  de  $X$  est l'image de  $G$  par l'application  $\varphi^a : g \mapsto \varphi(g, a)$ .

Si  $G$  agit transitivement sur  $X$ , les orbites sont égales à  $X$ .

*Remarque.* On obtient une relation d'équivalence sur  $X$  en posant  $y \equiv x$  s'il existe un élément  $g$  de  $G$  tel que  $y = \varphi_g(x)$ ; les classes d'équivalence sont les orbites des points de  $X$ ; l'espace quotient est appelé l'espace des orbites.

**Espaces homogènes.**

**DÉFINITION 1.5.** Un espace homogène associé à un groupe  $G$  est un ensemble  $X$  sur lequel  $G$  agit transitivement.

*Exemple type.* Quotient d'un groupe par un sous-groupe <sup>(2)</sup>.

Soit  $G$  un groupe,  $H$  un sous-groupe de  $G$ , et  $G/H$  l'ensemble quotient <sup>(3)</sup> formé des classes à gauche modulo  $H$ : deux éléments  $x, y$  de  $G$  sont équivalents s'il existe  $h \in H$  tel que  $y = xh$ , et la classe d'un élément  $x$  est l'ensemble  $xH$  des éléments de la forme  $xh$ , où  $h \in H$ .

On définit une action à gauche de  $G$  sur  $G/H$  en posant  $\varphi_g(xH) = gxH$  et cette action est évidemment transitive: l'ensemble quotient  $G/H$  est donc un espace homogène pour cette action.

Nous allons voir que tout espace homogène se ramène, par une bijection, à un espace de ce type.

**THÉORÈME 1.1.** Soit  $X$  un espace homogène associé au groupe  $G$ , et pour tout  $a \in X$ , soit  $G_a$  le groupe d'isotropie de  $a$ . Il existe alors une unique bijection  $f_a$  de  $G/G_a$  sur  $X$  telle que, pour tout  $g \in G$ ,  $f_a \circ p(g) = \varphi(g, a)$ , où  $p : G \rightarrow G/G_a$  désigne la projection canonique, et  $\varphi$  l'action de  $G$  sur  $X$ .

*Démonstration.* La relation  $\varphi(g', a) = \varphi(g, a)$  équivaut à  $\varphi(g^{-1}g', a) = a$ , donc à  $g^{-1}g' \in G_a$ , soit encore  $p(g') = p(g)$ : l'application  $\varphi^a : G \rightarrow X$ ,  $g \mapsto \varphi(g, a)$  passe donc au quotient et se factorise en  $\varphi^a = f_a \circ p$ , où  $f_a : G/G_a \rightarrow X$  est une bijection.  $\square$

**Cas particulier.**

Si le groupe  $G$  agit de façon simplement transitive sur  $X$ , les groupes d'isotropie  $G_a$  se réduisent à l'identité; pour chaque  $a \in X$ ,

2. Cette construction a été utilisée pour définir le quotient d'un espace vectoriel par un sous-espace vectoriel.

3. Rappelons que  $G/H$  n'admet une structure naturelle de groupe que si  $H$  est un sous-groupe invariant de  $G$ .

l'application  $\varphi^a : G \rightarrow X$ ,  $g \mapsto \varphi(g, a)$  est donc une bijection vérifiant  $\varphi^a(e) = a$ .

► Cette bijection  $\varphi^a$  permet de transporter sur  $X$  la structure de groupe de  $G$ , mais elle dépend du choix du point  $a$ , image de l'élément neutre: en termes intuitifs,  $X$  admet une structure de groupe isomorphe à  $G$ , dont l'élément neutre peut être choisi arbitrairement.

C'est ce qui va se passer dans le cas de la "structure affine".

**2. Espaces affines.**

► **DÉFINITION 2.1.** Soit  $E$  un espace vectoriel sur un corps quelconque  $K$ . Un espace affine associé à  $E$  est un ensemble  $\mathcal{E}$  sur lequel le groupe abélien  $(E, +)$  agit de façon simplement transitive. Cette action est notée habituellement:

$$E \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, \quad (u, x) \mapsto x + u;$$

pour tout  $u \in E$ , la bijection  $\tau_u : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ ,  $x \mapsto x + u$  est appelée translation de vecteur  $u$ ; et, pour tout couple  $a, b$  d'éléments de  $\mathcal{E}$ , l'unique vecteur  $u$  tel que  $b = \tau_u(a)$  est noté  $\overrightarrow{ab}$ .

Par la suite, pour des raisons typographiques, nous éviterons au maximum d'utiliser des flèches; et pour distinguer les éléments de  $\mathcal{E}$  (appelés points) des éléments de  $E$  (appelés vecteurs) nous désignerons de préférence les "points" par des majuscules telles que  $A, B, M$  etc. ..., et les "vecteurs" par des minuscules, telles que  $a, u, v$ ... les lettres grecques étant affectées aux "scalaires".

De la définition posée, on déduit les deux types de définition usuels, qui ne font pas appel à la notion d'"action de groupe".

**DÉFINITION ÉQUIVALENTE 2.2.** Un espace affine associé à  $E$  est un ensemble  $\mathcal{E}$  muni d'une famille  $(\tau_u)_{u \in E}$  de bijections telles que:

a)  $\tau_{0_E} = Id_{\mathcal{E}}$  et  $\forall (u, v) \in E \times E$ ,  $\tau_u \circ \tau_v = \tau_{u+v}$ .

b) pour tout couple  $(A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ , il existe un unique vecteur  $u \in E$  tel que  $B = \tau_u(A)$ .

**DÉFINITION ÉQUIVALENTE 2.3.** Un espace affine associé à  $E$  est un ensemble  $\mathcal{E}$  muni d'une application  $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow E$ , notée  $(A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$ , telle que:

- a) pour tout  $A \in \mathcal{E}$ , l'application  $\mathcal{E} \rightarrow E, M \mapsto \overrightarrow{AM}$  est bijective.  
 b) pour tous points  $A, B, C$  de  $\mathcal{E}$ , on a la relation de Chasles
- $$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

On notera que ces conditions impliquent, pour tout  $A \in \mathcal{E}$ , la relation  $\overrightarrow{AA} = \vec{0}_E$ .

On passe de la définition 2.3 à 2.2 en désignant par  $\tau_u(A)$  l'unique point  $B$  tel que  $\overrightarrow{AB} = u$  et en remarquant que la relation de Chasles équivaut alors à  $\tau_v \circ \tau_u = \tau_{u+v}$ . Le passage de la définition 2.2 à 2.1 est immédiat.

Quelle que soit la définition adoptée, le fait essentiel à retenir est que, pour tout  $A \in \mathcal{E}$ , l'application  $f_A : E \rightarrow \mathcal{E}, u \mapsto A + u = \tau_u(A)$  est une bijection; et cette bijection permet de transporter sur  $\mathcal{E}$  la structure vectorielle de  $E$ .

► *Notations.* La structure vectorielle ainsi obtenue sur  $\mathcal{E}$  sera appelée *structure vectorielle d'origine  $A$* ; et l'ensemble  $\mathcal{E}$ , muni de cette structure vectorielle, sera noté  $\mathcal{E}_A$ .

En termes intuitifs un espace affine apparaît donc comme un espace vectoriel dont l'origine n'a pas encore été choisie; et les propriétés affines de  $\mathcal{E}$  sont les propriétés de l'espace vectoriel  $\mathcal{E}_A$  qui ne dépendent pas du choix du point  $A$ .

On pourrait donc, sans inconvénient, ignorer la structure affine, et ramener tous les problèmes de géométrie affine à des problèmes vectoriels par choix d'une origine: c'est ce que font couramment les mathématiciens. Mais il peut être plus satisfaisant pour l'esprit de travailler de façon intrinsèque, sans choisir d'origine, et de dégager ainsi plus clairement les propriétés affines de  $\mathcal{E}$ . C'est ce que nous allons faire, mais sans oublier que l'introduction d'une structure vectorielle d'origine convenablement choisie peut bien souvent éclairer les choses!

#### Dimension d'un espace affine.

Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine associé à l'espace vectoriel  $E$ . Par définition, la dimension de  $\mathcal{E}$  est égale à celle de  $E$ .

En particulier, tout ensemble réduit à un point admet une unique structure affine de dimension 0, associée à l'espace vectoriel nul.

### 3. Sous-espaces affines (ou variétés linéaires affines).

Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine associé à l'espace vectoriel  $E$ . Chaque sous-espace vectoriel  $V$  de  $E$  constitue un sous-groupe de  $(E, +)$  agissant sur  $\mathcal{E}$  par translations. Par définition, les orbites de l'action de  $V$  sur  $\mathcal{E}$  sont appelées *variétés linéaires affines* (en abrégé: v.l.a.) de direction  $V$ . Le groupe  $(V, +)$  agissant de façon simplement transitive sur chacune de ces orbites, celles-ci sont canoniquement munies d'une structure affine associée à  $V$ : nous les appellerons donc aussi *sous-espaces affines* de  $\mathcal{E}$ .

Si  $\mathcal{O}$  est une v.l.a. dirigée par  $V$ , et  $A$  un point de  $\mathcal{O}$ ,  $\mathcal{O}$  admet une structure vectorielle  $\mathcal{O}_A$  d'origine  $A$ , et  $\mathcal{O}_A$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{E}_A$  (voir § précédent). Inversement, tout s.e.v. de  $\mathcal{E}_A$  est une v.l.a. passant par  $A$ ; nous énoncerons

► PROPOSITION 3.1. Les sous-espaces affines de  $\mathcal{E}$  passant par un point  $A$  sont les *sous-espaces vectoriels* de l'espace vectoriel  $\mathcal{E}_A$ .

Cette courte étude montre bien que la direction d'une v.l.a.  $\mathcal{O}$  de  $\mathcal{E}$  est entièrement déterminée par la donnée de l'ensemble  $\mathcal{O}$ .

#### Autres définitions.

#### Exercice

La proposition 3.1 montre l'équivalence de la définition ci-dessus avec la définition élémentaire suivante:

DÉFINITION 3.1. Une partie non vide  $\mathcal{O}$  de l'espace affine  $\mathcal{E}$  est une *variété linéaire affine* s'il existe un point  $A$  de  $\mathcal{O}$  tel que l'ensemble  $V_A = \{\overrightarrow{AM} \mid M \in \mathcal{O}\}$  soit un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Si on adopte la définition 3.1 on doit établir directement la proposition suivante:

Pour le résoudre utiliser :

PROPOSITION 3.2. Soit  $\mathcal{O}$  une partie non vide de  $\mathcal{E}$ , et  $A$  un point de  $\mathcal{O}$  tel que  $V_A = \{\overrightarrow{AM} \mid M \in \mathcal{O}\}$  soit un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors, pour tout point  $B$  de  $\mathcal{O}$ , l'ensemble  $V_B = \{\overrightarrow{BM} \mid M \in \mathcal{O}\}$  est égal à  $V_A$ .

Démonstration.  $V_B$  est l'ensemble des vecteurs  $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}$ ,

où  $\overrightarrow{AM} \in V_A$ ; donc  $V_B$  est l'image de  $V_A$  par la bijection  $\tau : E \rightarrow E$ ,  $u \mapsto u - \overrightarrow{AB}$ ; et puisque  $\overrightarrow{AB} \in V_A$ ,  $\tau(V_A) = V_A$ .

Ce résultat étant acquis, on voit facilement que  $\mathcal{O}$  a une structure d'espace affine associé à l'espace vectoriel  $V = V_A$ , cet espace vectoriel étant indépendant de  $A$ .

Au lieu de partir de la structure vectorielle de  $V_A$ , on peut aussi s'appuyer sur la relation d'équivalence associée à l'action de  $V$  sur  $\mathcal{O}$  (voir § 1): les v.l.a. de  $\mathcal{E}$  sont les classes d'équivalence correspondantes, ce qui conduit à définition suivante:

**DÉFINITION ÉQUIVALENTE 3.2.** Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $E$ , et  $\mathcal{R}_V$  la relation d'équivalence définie sur  $\mathcal{E}$  par:

$$A \mathcal{R}_V B \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \in V;$$

les variétés linéaires affines de direction  $V$  sont les classes d'équivalence modulo  $\mathcal{R}_V$ .

Il existe d'autres façons de définir les v.l.a. de  $\mathcal{E}$  (cf. exercice III.4); mais il semble que les définitions données ci-dessus soient celles qui conduisent aux modes d'exposition les plus simples.

**Cas d'un espace vectoriel.**

Tout espace vectoriel  $E$  est canoniquement muni d'une structure affine, puisque  $(E, +)$  agit sur lui-même par translations; dans ce cas, le vecteur nul  $0$  est appelé aussi "origine" de  $E$ , et on a:

$$\forall (p, q) \in E^2 \quad \overrightarrow{pq} = q - p.$$

Les v.l.a. de  $E$  passant par  $0$  sont les sous-espaces vectoriels de  $E$ ; les v.l.a. passant par un point  $a$  de  $E$  sont les images des s.e.v. de  $E$  dans la translation  $\tau_a$ .

Pour abrégé, les v.l.a. ne passant pas par l'origine seront dits proprement affines (car ce ne sont pas des s.e.v. de  $E$ ).

**Dimension d'une variété linéaire affine.**

Revenons au cas d'un espace affine quelconque  $\mathcal{E}$ ; l'étude qui précède nous permet de définir la dimension d'une v.l.a. comme étant celle du s.e.v. qui la dirige: d'où les notions de droite affine (v.l.a. de di-

mension 1) et de plan affine (v.l.a. de dimension 2). Les v.l.a. de dimension 0 sont les points de  $\mathcal{E}$ .

De même une v.l.a. sera appelée un hyperplan affine si elle est dirigée par un hyperplan vectoriel.

**Intersection de variétés linéaires affines.**

► **PROPOSITION 3.3.** Soit  $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$  une famille quelconque de sous-espaces affines de  $\mathcal{E}$ , et, pour tout  $i \in I$ , soit  $V_i$  la direction de  $\mathcal{O}_i$ .

Si l'intersection  $\mathcal{O} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{O}_i$  n'est pas vide, c'est un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  dirigé par  $V = \bigcap_{i \in I} V_i$ .

La démonstration est immédiate si on adopte la définition 3.1. Avec les mêmes notations, on a:

**PROPOSITION 3.4.** Pour que l'intersection  $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$  de deux v.l.a. de  $\mathcal{E}$  soit non vide, il faut et il suffit qu'il existe un point  $A_1$  de  $\mathcal{O}_1$  et un point  $A_2$  de  $\mathcal{O}_2$  tels que  $\overrightarrow{A_1A_2} \in V_1 + V_2$ , et on a alors

$$(\forall M_1 \in \mathcal{O}_1) (\forall M_2 \in \mathcal{O}_2) \quad \overrightarrow{M_1M_2} \in V_1 + V_2.$$

*Démonstration.* Si  $A \in \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ , on a pour tout  $M_1 \in \mathcal{O}_1$  et tout  $M_2 \in \mathcal{O}_2$ :  $\overrightarrow{AM_1} \in V_1$ , et  $\overrightarrow{AM_2} \in V_2$ ; donc  $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{AM_2} - \overrightarrow{AM_1} \in V_1 + V_2$ .

Inversement, s'il existe  $A_1 \in \mathcal{O}_1$  et  $A_2 \in \mathcal{O}_2$  tels que  $\overrightarrow{A_1A_2} \in V_1 + V_2$ , on peut décomposer  $\overrightarrow{A_1A_2}$  en  $\overrightarrow{A_1A_2} = u_1 + u_2$ , où  $u_1 \in V_1$  et  $u_2 \in V_2$ . Alors le point  $A$  défini par  $\overrightarrow{A_1A} = u_1$  appartient à  $\mathcal{O}_1$ , et vérifie  $\overrightarrow{A_2A} = -u_2$ , ce qui prouve que  $A$  appartient aussi à  $\mathcal{O}_2$ ; donc  $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$  est non vide. □

De la proposition 3.4 on déduit des exemples de v.l.a. dont l'intersection est vide, et aussi:

**PROPOSITION 3.5.** Si  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$  sont deux sous-espaces affines de  $\mathcal{E}$  dont les directions sont supplémentaires dans  $E$ , alors  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$  ont un unique point commun.

**Parallélisme.**

DÉFINITION 3.3. On dit que deux variétés linéaires affines  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$  sont *fortement parallèles* si elles ont même espace directeur  $V_1 = V_2$ .

Plus généralement, on dit que  $\mathcal{O}_1$  est *faiblement parallèle* à  $\mathcal{O}_2$  si les espaces directeurs  $V_1, V_2$  de  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$  vérifient l'inclusion  $V_1 \subset V_2$ .

On vérifie que la relation: " $\mathcal{O}_1$  est fortement [resp. faiblement] parallèle à  $\mathcal{O}_2$ " équivaut à l'existence d'une *translation*  $\tau$  de  $\mathcal{E}$  telle que  $\tau(\mathcal{O}_1) = \mathcal{O}_2$  [resp.  $\tau(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{O}_2$ ].

**Sous-espace-affine engendré par une partie X de  $\mathcal{E}$ .**

► PROPOSITION 3.6. Si X est une partie non vide de  $\mathcal{E}$ , il existe un unique sous-espace affine de  $\mathcal{E}$ , noté  $\text{Aff}(X)$ , contenant X et possédant la propriété suivante:

*Tout sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  contenant X contient  $\text{Aff}(X)$ .*

La v.l.a.  $\text{Aff}(X)$  est dite *engendrée* par X.

Une manière rapide de démontrer 3.6 est d'appliquer la proposition (3.3):  $\text{Aff}(X)$  est l'intersection de toutes les v.l.a. contenant X. L'inconvénient de cette méthode est de faire intervenir la famille de "toutes les v.l.a. contenant X" sur laquelle on sait peu de choses, et qui n'est, dans les cas usuels, même pas dénombrable!

Il est plus élémentaire et plus constructif de prendre pour origine un point A de X et de voir que le problème se ramène à la recherche du plus petit sous-espace vectoriel de  $\mathcal{E}_A$  contenant X (puisque les v.l.a. contenant X sont des s.e.v. de  $\mathcal{E}_A$ ): donc  $\text{Aff}(X)$  est *le s.e.v. de  $\mathcal{E}_A$  engendré par X*; et la nature du problème posé montre que *cet ensemble est indépendant du choix de A dans X*. Si nous remarquons que la direction de  $\text{Aff}(X)$  est le s.e.v. de E engendré par les vecteurs  $(\overrightarrow{AM})_{M \in X}$  nous obtenons ainsi:

PROPOSITION 3.7. Soit X une partie non vide de  $\mathcal{E}$ , et pour tout  $A \in X$ , soit  $V_A = \text{Vect}(\overrightarrow{AM})_{M \in X}$ . Alors l'espace vectoriel  $V_A$  est indépendant de A, et  $\text{Aff}(X)$  est la v.l.a. dirigée par  $V_A$  passant par A.

On peut en donner une démonstration directe, analogue à celle de la proposition 3.2.

En particulier, si  $X = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$  est un ensemble fini, l'espace vectoriel  $V_i = \text{Vect}(\overrightarrow{A_i A_j})_{j \neq i}$  est indépendant de i, donc égal à

$$V_0 = \text{Vect}(\overrightarrow{A_0 A_j})_{1 \leq j \leq n} \text{ et à } \text{Vect}(\overrightarrow{A_i A_j})_{\substack{0 \leq i < n \\ 0 \leq j < n}}$$

On en déduit

PROPOSITION 3.8. Le sous-espace affine engendré par  $n + 1$  points  $A_0, \dots, A_n$  de  $\mathcal{E}$  est au plus de dimension n; et il est de dimension n ssi les n vecteurs  $\overrightarrow{A_0 A_i}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) forment une famille libre.

Les autres propriétés des v.l.a. seront étudiées en liaison avec la notion de *barycentre*.

**4. Barycentres; applications à l'études des sous-espaces affines.**

Dans ce qui suit,  $\mathcal{E}$  désigne toujours un espace affine associé à un espace vectoriel à gauche E sur le corps K (non nécessairement commutatif). Un "point pondéré" est un élément  $(A, \lambda)$  de  $\mathcal{E} \times K$ .

► THÉORÈME 4.1. Pour toute famille finie (ou: système)  $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$  de points pondérés telle que  $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$ , il existe un unique point

G vérifiant l'une des trois conditions suivantes a) b) c), et il vérifie alors les deux autres:

$$a) \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = 0$$

$$b) \exists A \in \mathcal{E} \left( \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{AG} = \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{AA_i} \right)$$

$$c) \forall A \in \mathcal{E} \left( \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{AG} = \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{AA_i} \right)$$

Ce point G est appelé le *barycentre* du système  $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ . Nous le noterons  $\mathfrak{B}(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ .

Cette équivalence se démontre facilement par application de la relation de Chasles.

PROPRIÉTÉS. a) *Homogénéité* (à gauche)

PROPOSITION 4.2. Pour tout  $\lambda \in K^*$ , on a :

$$\mathfrak{B}(A_i, \lambda \lambda_i)_{i \in I} = \mathfrak{B}(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$$

b) *Associativité*

PROPOSITION 4.3. Soit  $(I_1, \dots, I_p)$  une *partition* de  $I$ , c'est-à-dire un ensemble de parties disjointes et non vides de  $I$  telles que

$$\bigcup_{1 \leq \alpha \leq p} I_\alpha = I$$

Si, pour tout  $\alpha \in \{1, \dots, p\}$ , le scalaire  $\mu_\alpha = \sum_{i \in I_\alpha} \lambda_i$  est non nul, et si on pose  $G_\alpha = \mathfrak{B}(\lambda_i, A_i)_{i \in I_\alpha}$  alors

$$\mathfrak{B}(A_i, \lambda_i)_{i \in I} = \mathfrak{B}(G_\alpha, \mu_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq p}$$

Les démonstrations sont immédiates.  $\square$

► *Notations.* D'après la proposition 4.2 on peut toujours se ramener au cas où la "masse totale" du système  $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ , soit  $\sum_{i \in I} \lambda_i$ , est égale à 1. Dans ce cas, et dans ce cas seulement, on peut poser

**Notation :**  $\mathfrak{B}(A_i, \lambda_i)_{i \in I} = \sum_{i \in I} \lambda_i A_i$  lorsque  $\sum \lambda_i = 1$ .

Pour bien utiliser cette notation, il faut noter que la relation  $G = \sum_{i \in I} \lambda_i A_i$  équivaut à chacune des assertions suivantes :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i = 1 \text{ et } (\exists A \in \mathcal{E}) \quad \overrightarrow{AG} = \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{AA_i} \quad (1)$$

$$(\forall A \in \mathcal{E}) \quad \overrightarrow{AG} = \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{AA_i} \quad (2)$$

car la relation (2) implique  $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ .

L'*équibarycentre* d'une partie finie  $(A_i)_{i \in I}$  de  $\mathcal{E}$  est le point  $\mathfrak{B}(A_i, 1)_{i \in I}$ ; il n'existe que si la caractéristique de  $K$  n'est pas un diviseur de l'entier  $n = \text{Card}(I)$ .

La proposition suivante montre que la construction d'un barycentre se ramène, sauf exception, à des constructions successives de barycentres de couples.

PROPOSITION 4.4. Soit  $(A_i, \lambda_i)$  une famille finie de points pondérés vérifiant  $\lambda_i \neq 0$  pour tout  $i \in I$ ,  $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$  et  $\text{Card}(I) \geq 3$ .

Si  $K$  n'est pas de caractéristique 2, il existe une partition  $(J, K)$  de  $I$  telle que

$$\sum_{i \in J} \lambda_i \neq 0 \text{ et } \sum_{i \in K} \lambda_i \neq 0.$$

*Démonstration.* Si l'une des sommes  $\mu_j = \sum_{i \in I \setminus \{j\}} \lambda_i$  est non nulle, il suffit de poser  $J = \{j\}$ , et  $K = I \setminus \{j\}$ .

Si toutes les sommes  $\mu_j$  sont nulles, les  $\lambda_i$  sont tous égaux à un élément  $\lambda$  de  $K^*$  tel que  $(n - 1)\lambda = 0$ , avec  $n = \text{Card}(I)$ .

Si  $K$  n'est pas de caractéristique 2, on a  $2\lambda \neq 0$  et puisque  $(n - 2)\lambda = -\lambda$  est non nul on obtient la partition cherchée en partageant  $I$  en un ensemble à deux éléments et un ensemble à  $n - 2$  éléments.  $\square$

COROLLAIRE. Si  $K$  n'est pas de caractéristique 2, la construction du barycentre de  $n$  points se ramène à la construction successive de  $n - 1$  barycentres de couples.

**Application aux variétés linéaires affines.**

THÉORÈME 4.5. Si  $X$  est une partie non vide de  $\mathcal{E}$ ,  $\text{Aff}(X)$  est l'ensemble des barycentres des familles finies de points pondérés à support dans  $X$ .

*Démonstration.* Précisons d'abord que le support de la famille  $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$  est l'ensemble  $\{A_i\}_{i \in I}$ .

Cela étant, choisissons un point  $A$  dans  $X$ . Les barycentres des familles à support dans  $X$  sont les points  $G$  vérifiant une relation de la forme

$$\overrightarrow{AG} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{AA_i} \quad (3)$$

avec  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  et  $(\forall i) A_i \in X$ ; et la relation (3) implique

$\vec{AG} \in \text{Vect}(AM)_{M \in X}$  donc  $G \in \text{Aff}(X)$  (cf. Prop. 3.7). Inversement si  $G$  est un point de  $\text{Aff}(X)$ , il existe des points  $A_1 \dots A_n$  de  $X$  et des scalaires  $\lambda_1 \dots \lambda_n$  (de somme non nécessairement égale à 1) tels que  $\vec{AG} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{AA}_i$ ; cette relation peut aussi s'écrire

$$\vec{AG} = \sum_{i=0}^n \lambda_i \vec{AA}_i \text{ avec } \lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{ et } A_0 = A;$$

donc  $G$  est le barycentre d'un système à support dans  $X$ .  $\square$

► DÉFINITION 4.1. Une partie  $X$  de  $\mathcal{E}$  est dite *affinement génératrice* si  $\text{Aff}(X) = \mathcal{E}$ ; elle est dite *affinement libre* si tout point  $M$  de  $\text{Aff}(X)$  s'écrit d'une seule manière  $M = \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i$  avec  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  et, pour tout  $i$ ,  $A_i \in X$ .

Une partie affinement libre et génératrice est appelée un *repère affine*.

En choisissant une origine  $A$  dans  $X$  et en posant  $X_A = \{AM \mid M \in X\}$ , on voit facilement que  $X$  est affinement libre [resp. génératrice] ssi  $X_A$  est libre [resp. génératrice]. (Rappelons ici que  $\text{Vect}(X_A)$  est indépendant du choix de  $A$ ). On en déduit:

PROPOSITION 4.6 Pour qu'une partie  $X$  de  $\mathcal{E}$  soit affinement génératrice, il faut et il suffit qu'il n'existe aucun hyperplan affine contenant  $X$ .

Enfin, par application de la proposition 3.7, on a:

PROPOSITION 4.7. Si  $\mathcal{E}$  est un espace affine de dimension finie  $n$ , tout repère affine de  $\mathcal{E}$  est formé de  $n + 1$  points.

Inversement, pour que  $n + 1$  points  $A_0, A_1, \dots, A_n$  de  $\mathcal{E}$  forment un *repère affine*, il faut et il suffit que les  $n$  vecteurs  $\vec{A_0A_i}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) forment une base de  $E$  — ou (condition équivalente): que  $A_0, \dots, A_n$  n'appartiennent pas à un même hyperplan affine.

Notons que si  $\mathcal{O}$  est une v.l.a. de dimension finie de  $\mathcal{E}$ , et  $(A_0, A_1, \dots, A_p)$  un repère affine de  $\mathcal{O}$ ,  $\mathcal{O}$  est l'ensemble des points

$\sum_{i=0}^p \lambda_i A_i$  avec  $\sum_{i=0}^p \lambda_i = 1$ . Ce mode de paramétrisation est souvent utile. En particulier la *droite affine* joignant deux points  $A, B$  de  $\mathcal{E}$  est l'ensemble des points  $\lambda A + (1 - \lambda)B$  ( $\lambda \in K$ ).

**Une caractérisation des sous-espaces affines.**

Le théorème suivant justifie la définition élémentaire des plans que l'on donne au début de la géométrie, à savoir "un plan est un ensemble  $P$  de points tel que toute droite contenant deux points de  $P$  est contenue dans  $P$ ".

► THÉORÈME 4.8. Pour qu'une partie non vide  $\mathcal{O}$  de  $\Sigma$  soit une variété linéaire affine, il faut et il suffit que:

a) si  $K \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ : toute droite joignant deux points de  $\mathcal{O}$  soit contenue dans  $\mathcal{O}$ .

b) si  $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ : l'équibarycentre de trois points quelconques de  $\mathcal{O}$  soit dans  $\mathcal{O}$ .

*Démonstration.* Nous savons déjà que la condition énoncée est nécessaire. Pour prouver qu'elle est suffisante, choisissons  $A$  dans  $\mathcal{O}$  et montrons que  $V = \{\vec{AM} \mid M \in \mathcal{O}\}$  est un s.e.v. de  $E$ .

a) Supposant  $K \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , montrons d'abord que ( $u \in V$  et  $\lambda \in K$ ) implique  $\lambda u \in V$ : par hypothèse, il existe  $B \in \mathcal{O}$  tel que  $\vec{AB} = u$ ; le point  $C$  défini par  $\vec{AC} = \lambda u$  appartient à la droite  $(AB)$ , donc à  $\mathcal{O}$ , d'où il résulte que  $\lambda u \in V$ .

Considérons ensuite deux éléments quelconques  $u = \vec{AB}$  et  $v = \vec{AC}$  de  $V$ , et choisissons  $k \in K \setminus \{0, 1\}$  (ce qui est possible puisque  $K$  ne se réduit pas à  $\{0, 1\}$ ). Les points  $B' = A + k^{-1}u$  et  $C' = A + (1 - k)^{-1}v$  (voir figure 1) appartiennent respectivement aux droites  $(AB)$  et  $(AC)$  donc à  $\mathcal{O}$ . En conséquence le point  $D = kB' + (1 - k)C' = A + u + v$  appartient à  $\mathcal{O}$ , ce qui prouve que  $u + v \in V$ . Donc  $V$  est bien un s.e.v. de  $E$ .



b) Si  $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , il est trivial que  $(\lambda, u) \in K \times V$  implique  $\lambda u \in V$  (car  $\lambda$  ne peut prendre que les valeurs 0, 1); et si  $u = \overrightarrow{AB}$ ,  $v = \overrightarrow{AC}$  sont deux éléments de  $V$ , le point  $D$  défini par  $\overrightarrow{AD} = u + v$  est l'équibarycentre de  $A, B, C$ , d'où le résultat.  $\square$

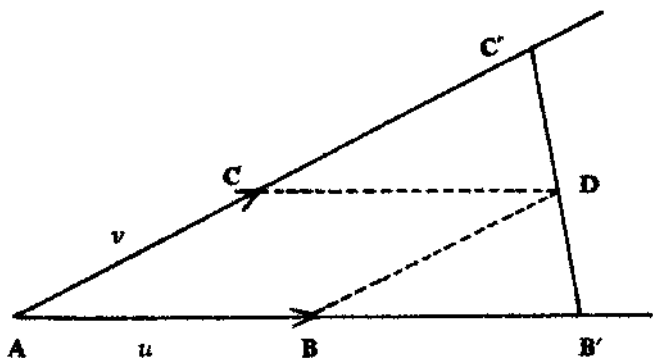


Fig. 1

### 5. Applications affines et semi-affines.

► DÉFINITION 5.1. Soit  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  deux espaces affines respectivement associés aux espaces vectoriels  $E, F$ . Une application  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  est dite *semi-affine* [resp. *affine*] s'il existe un point  $A$  de  $\mathcal{E}$  tel que l'application  $\varphi_A : E \rightarrow F, u \mapsto \overrightarrow{f(A)f(A+u)}$  soit *semi-linéaire* [resp. *linéaire*].  
 Donc  $f(A+u) = f(A) + \varphi_A(u)$

PROPOSITION 5.1. S'il existe un point  $A$  de  $\mathcal{E}$  vérifiant la condition ci-dessus, il en est de même pour tout point de  $\mathcal{E}$ , et l'application  $\varphi_A$  est indépendante de  $A$ .

Démonstration. Pour tout couple  $(u, B) \in E \times \mathcal{E}$ , on a, puisque  $\varphi_A$  est linéaire:

$$\begin{aligned} f(B + u) &= f(A + \overrightarrow{AB} + u) = f(A) + \varphi_A(\overrightarrow{AB} + u) = \\ &= f(A) + \varphi_A(\overrightarrow{AB}) + \varphi_A(u) = f(B) + \varphi_A(u) \end{aligned}$$

d'où le résultat.  $\square$

### Exemples : translations ; applications constantes.

► Notations. L'application  $\varphi_A$  sera noté  $L(f)$  et appelée *partie semi-linéaire* [resp. *linéaire*] de  $f$ .

Interprétation. Fixons un point  $A$  de  $\mathcal{E}$  et munissons  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  des structures vectorielles obtenues en prenant  $A$  pour origine dans  $\mathcal{E}$ , et  $f(A)$  pour origine dans  $\mathcal{F}$ : alors  $f$  est *semi-affine* [resp. *affine*] si, et seulement si,  $f$  est une application *semi-linéaire* [resp. *linéaire*] de  $\mathcal{E}_A$  dans  $\mathcal{F}_{f(A)}$ .

En particulier l'étude des applications *semi-affines* [resp. *affines*] de  $\mathcal{E}$  dans lui-même qui admettent un point fixe  $A$  se ramène à l'étude des applications *semi-linéaires* [resp. *linéaires*] de  $\mathcal{E}_A$  dans lui-même.

C'est le cas des homothéties, projections et symétries (voir plus loin).

► Il est important de noter qu'une *application semi-affine* [resp. *affine*] est entièrement déterminée par la donnée de sa *partie semi-linéaire* [resp. *linéaire*] et de l'image d'un point.

Si  $E, F$  sont deux espaces vectoriels, une application *semi-affine* [resp. *affine*] de  $E$  dans  $F$  est une application de la forme  $f : x \mapsto \varphi(x) + k$ , où  $\varphi$  est *semi-linéaire* [resp. *linéaire*] et  $k = f(0)$  une constante.

Propriétés immédiates. Si  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  est *semi-affine*:

- 1) L'image d'une v.l.a. de  $\mathcal{E}$  est une v.l.a. de  $\mathcal{F}$ .
- 2) L'image réciproque d'une v.l.a. de  $\mathcal{F}$  est une v.l.a. de  $\mathcal{E}$ , ou l'ensemble vide.
- 3) Pour tout système  $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$  de points pondérés de  $\mathcal{E}$ , l'image du barycentre  $\mathcal{B}(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$  est le barycentre  $\mathcal{B}(f(A_i), \theta(\lambda_i))_{i \in I}$ , où  $\theta$  désigne l'isomorphisme de corps associé à  $f$ .

### Utilisation de repères affines.

► THÉORÈME 5.2. Soit  $\mathcal{E}, \mathcal{F}$  des espace affines sur les corps  $K, K'$ ,  $\theta$  un isomorphisme de  $K$  sur  $K'$ ,  $(A_i)_{i \in I}$  un repère affine de  $\mathcal{E}$ , et  $(B_i)_{i \in I}$  une famille de points de  $\mathcal{F}$  indexée par le même ensemble  $I$ .

Il existe alors une *unique application semi-affine*  $f$  de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{F}$  associée à l'isomorphisme  $\theta$  et vérifiant  $f(A_i) = B_i$  pour  $i \in I$ .

De plus  $f$  est *bijective* [resp. *injective*, *surjective*] si et seulement si la famille  $(B_i)_{i \in I}$  est un *repère affine* [resp. une famille libre, une famille génératrice] de  $\mathcal{F}$ .

*Démonstration.* On se ramène au théorème II 4.5 en prenant l'un des points  $A_i$  pour origine dans  $\mathcal{G}$ , et son correspondant  $B_i$  pour origine dans  $\mathcal{F}$ : l'application  $f$  est définie par

$$f\left(\sum_{i \in J} x_i A_i\right) = \sum_{i \in J} \theta(x_i) B_i$$

pour toute partie finie  $J$  de  $I$  et tout système de scalaires  $(x_i)_{i \in J}$  tels que  $\sum_{i \in J} x_i = 1$ .  $\square$

► En particulier, une application affine de  $\mathcal{G}$  dans  $\mathcal{F}$  est déterminée par la donnée de l'image d'un repère affine de  $\mathcal{G}$ .

**Application: équations d'un hyperplan affine ou d'une v.l.a.**

► En s'appuyant sur l'étude faite au § II.6 on a facilement:

PROPOSITION 5.3. Soit  $\mathcal{G}$  un espace affine sur le corps  $K$ .

a) si  $f : \mathcal{G} \rightarrow K$  est une application affine non constante,  $f^{-1}(0)$  est un hyperplan affine de  $\mathcal{G}$ , dirigé par  $\text{Ker } L(f)$ ;

b) inversement, si  $\mathcal{H}$  est un hyperplan affine de  $\mathcal{G}$ , il existe une application affine  $f$  telle que  $\mathcal{H} = f^{-1}(0)$ ; et les applications affines de  $\mathcal{G}$  dans  $K$  vérifiant cette même condition sont les applications  $f_k : x \mapsto f(x)k$ , où  $k \in K^*$ .

Si  $\mathcal{G}$  est un espace affine de dimension finie  $n$ , on démontre de même que toute v.l.a. de dimension  $p$  de  $\mathcal{G}$  admet un système d'équations cartésiennes de la forme  $f_i(x) = 0$  ( $1 \leq i \leq n - p$ ) où les  $f_i$  sont des applications affines de  $\mathcal{G}$  dans  $K$  dont les parties linéaires sont indépendantes.

**Une caractérisation des applications affines.**

► THÉORÈME 5.4. Soit  $\mathcal{G}, \mathcal{F}$  deux espaces affines sur le même corps  $K$ . Pour qu'une application  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$  soit affine, il faut et il suffit que:

a) si  $K \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$(\forall (A, B, \lambda) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} \times K) \quad f((1 - \lambda)A + \lambda B) = (1 - \lambda)f(A) + \lambda f(B)$$

b) Si  $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , l'image de l'équibarycentre de trois points quelconques de  $\mathcal{G}$  soit l'équibarycentre de leurs images.

*Démonstration* (analogue à celle du théorème 4.8.).

a) Le point  $A$  de  $\mathcal{G}$  étant fixé, la relation (a) montre que, pour tout élément  $u = \overrightarrow{AB}$  de l'espace directeur  $E$  de  $\mathcal{G}$ , on a:

$$f(A + \lambda u) = f((1 - \lambda)A + \lambda B) = f(A) + \lambda \overrightarrow{f(A) f(A + u)}$$

L'application  $\varphi : u \mapsto \overrightarrow{f(A) f(A + u)}$  vérifie donc  $\varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u)$ .

Pour prouver qu'elle vérifie aussi  $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$  pour tout  $(u, v) \in E \times E$ , choisissons  $B, C$  tels que  $\overrightarrow{AB} = u, \overrightarrow{AC} = v$ , puis  $\lambda \in K \setminus \{0, 1\}$  et  $B', C'$  tels que  $\overrightarrow{AB'} = \lambda^{-1}u, \overrightarrow{AC'} = (1 - \lambda)^{-1}v$ . Par application de (a) on a alors  $f(A + u + v) = f(\lambda B' + (1 - \lambda)C') = \lambda f(B') + (1 - \lambda) f(C')$ , d'où

$$\begin{aligned} \varphi(u + v) &= \lambda \overrightarrow{f(A) f(A + \lambda B')} + (1 - \lambda) \overrightarrow{f(A) f(A + (1 - \lambda)C')} = \\ &= \lambda \varphi(\lambda^{-1}u) + (1 - \lambda) \varphi((1 - \lambda)^{-1}v) = \varphi(u + v). \end{aligned}$$

Le cas b) est laissé au soin du lecteur (exercice III 7).  $\square$

On peut aussi énoncer le théorème 5.4 en disant qu'une application de  $\mathcal{G}$  dans  $\mathcal{F}$  est affine ssi sa restriction à toute droite affine de  $\mathcal{G}$  est affine.

Nous donnerons plus loin une caractérisation purement géométrique des applications semi-affines (§ 9).

**Points fixes des applications affines ou semi-affines.**

► THÉORÈME 5.5. Si  $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  est semi-affine, et si l'ensemble  $I(f) = \{M \in \mathcal{G} \mid f(M) = M\}$  des points fixes de  $f$  est non vide, c'est une v.l.a. dirigée par l'ensemble  $I(L(f)) = \text{Ker}(L(f) - \text{Id}_E)$  des éléments fixes de  $L(f)$ .

D'autre part, si  $\mathcal{G}$  est de dimension finie, et si  $L(f)$  n'a pas d'autre point fixe que 0, alors  $f$  admet un point fixe unique.

*Démonstration.* Le point  $A$  de  $\mathcal{G}$  étant fixé, la relation  $f(M) = M$  équivaut à  $\overrightarrow{f(A) f(M)} = \overrightarrow{f(A) M}$ , donc à  $\overrightarrow{\varphi(AM)} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{f(A)A}$ , avec  $\varphi = L(f)$ .

- Si  $A$  est un point fixe de  $f$ ,  $M \in \mathcal{L}(f)$  équivaut à  $\overrightarrow{AM} \in \text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E)$ , d'où la première assertion.
- Si  $\text{Ker}(\varphi - \text{Id}_E) = \{0\}$ , l'application  $\varphi - \text{Id}_E$  est injective, donc bijective si  $E$  est de dimension finie, et il existe un unique point  $M$  de  $\mathcal{E}$  tel que  $\overrightarrow{\varphi(AM)} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{f(A)A}$ , d'où la seconde assertion.  $\square$

► *Remarque importante.* Si  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  est une application quelconque, et  $g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  une bijection, alors  $\mathcal{L}(g \circ f \circ g^{-1}) = g(\mathcal{L}(f))$ .

Cette remarque générale est particulièrement utile dans le cas des applications affines.

### Les groupes affines et semi-affines.

Si  $f : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$  et  $g : \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_3$  sont deux applications affines [resp. semi-affines], alors  $g \circ f$  est affine [resp. semi-affine] et on a  $\mathcal{L}(g \circ f) = \mathcal{L}(g) \circ \mathcal{L}(f)$ . On en déduit:

**THÉORÈME 5.6.** Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine associé à l'espace vectoriel  $E$ . Les *bijections affines* [resp. semi-affines] de  $\mathcal{E}$  sur  $\mathcal{E}$  constituent un groupe, que nous noterons  $\text{GA}(\mathcal{E})$  [resp.  $\text{GSA}(\mathcal{E})$ ]. L'application  $\mathcal{L}$  (partie linéaire ou semi-linéaire) est un homomorphisme de  $\text{GA}(\mathcal{E})$  sur  $\text{GL}(E)$ , et de  $\text{GSA}(\mathcal{E})$  sur le groupe  $\text{GSL}(E)$  des *bijections semi-linéaires* de  $E$  sur  $E$ .

Enfin, pour tout point  $P$  de  $\mathcal{E}$ , la restriction de  $\mathcal{L}$  au groupe d'isotropie de  $P$  dans  $\text{GA}(\mathcal{E})$  [resp.  $\text{GSA}(\mathcal{E})$ ] est un isomorphisme de ce groupe sur  $\text{GL}(E)$  [resp.  $\text{GSL}(E)$ ].

La dernière assertion s'obtient en prenant  $P$  pour origine dans  $\mathcal{E}$ .

**COROLLAIRE.** Si  $H$  est un sous-groupe de  $\text{GL}(E)$  [resp.  $\text{GSL}(E)$ ],  $\mathcal{L}^{-1}(H)$  est un sous-groupe de  $\text{GA}(\mathcal{E})$  [resp.  $\text{GSA}(\mathcal{E})$ ]; et si  $H$  est invariant, il en est de même de  $\mathcal{L}^{-1}(H)$ .

► En particulier: si  $H = \text{Id}_E$ ,  $\mathcal{L}^{-1}(H)$  est le sous-groupe invariant de  $\text{GA}(\mathcal{E})$  constitué par les *translations*.

Si  $H = \{\pm \text{Id}_E\}$ ,  $\mathcal{L}^{-1}(H)$  est le sous-groupe invariant de  $\text{GA}(\mathcal{E})$  constitué des *translations* et *symétries centrales*.

Si  $H$  est le sous-groupe invariant de  $\text{GSL}(E)$  formé des *homothéties vectorielles* (voir § II.4),  $\mathcal{L}^{-1}(H)$  est un sous-groupe invariant de  $\text{GSA}(\mathcal{E})$  appelé *groupe des dilatations*.

Si  $f$  est une dilatation ne se réduisant pas à une translation,  $\mathcal{L}(f)$  est une homothétie vectorielle de la forme  $u \mapsto ku$  avec  $k \neq 1$ . Dans ce cas  $f$  admet un point fixe unique  $I$  défini par  $(k - 1) \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{f(A)A}$  où  $A$  est un point arbitraire de  $\mathcal{E}$ . Donc  $f$  est de la forme  $M \mapsto I + k \overrightarrow{IM}$ . Une telle application est appelée une *homothétie de centre  $I$  et de rapport  $k$* .

Nous énoncerons:

► **PROPOSITION 5.7.** Les translations et homothéties de  $\mathcal{E}$  constituent un sous-groupe invariant de  $\text{GSA}(\mathcal{E})$ , appelé *groupe des dilatations* de  $\mathcal{E}$ . Nous le noterons  $\text{Dil}(\mathcal{E})$ .

Pour une caractérisation purement géométrique de ce groupe voir exercice III.8.

Si le corps de base  $K$  est commutatif,  $\text{Dil}(\mathcal{E})$  est un sous-groupe invariant de  $\text{GA}(\mathcal{E})$ .

### Projections.

Appelons *projection* de  $\mathcal{E}$  toute application affine  $p$  de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$  vérifiant  $p \circ p = p$ .

Une telle application admet pour point fixe tout point  $A$  de  $p(\mathcal{E})$ : en prenant pour origine un tel point  $A$ , on se ramène donc au cas d'une projection de l'espace vectoriel  $\mathcal{E}_A$ ; d'où l'existence de telles applications  $p$ , et la caractérisation géométrique suivante:

**PROPOSITION 5.8.** Une application  $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  est une *projection* s'il existe un s.e.v.  $W$  de  $E$ , et une v.l.a.  $\mathcal{W}$  de  $\mathcal{E}$  dirigée par un supplémentaire  $V$  de  $W$ , tels que pour tout  $M \in \mathcal{E}$ ,  $p(M)$  soit le point d'intersection de  $\mathcal{W}$  avec la v.l.a. de direction  $W$  passant par  $M$  (voir figure 2).

### Symétries affines.

► **THÉORÈME 5.9.** Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine associé à un espace vectoriel  $E$  sur un corps  $K$  de caractéristique  $\neq 2$ <sup>4)</sup>.

4. Le résultat énoncé tombe en défaut si  $K$  est de caractéristique 2 (voir exercice III 5).

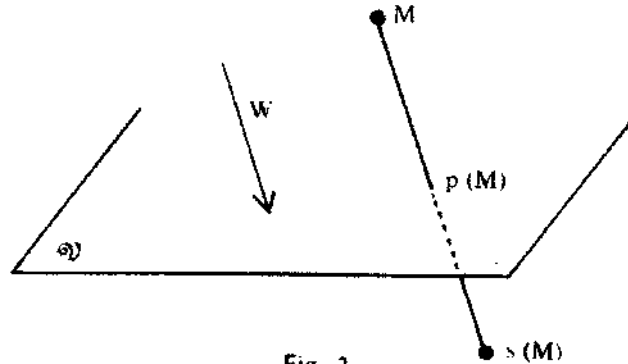


Fig. 2.

► Pour qu'une application affine  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  soit *involutive*, il faut et il suffit qu'elle admette au moins un point fixe, et que sa partie linéaire soit une symétrie vectorielle de  $E$ .

Une telle application est appelée une *symétrie affine*.

*Démonstration.* Si  $f \circ f = \text{Id}_{\mathcal{E}}$ , et si  $A \in \mathcal{E}$ , l'image par  $f$  du milieu de  $[A, f(A)]$  est le milieu de  $[f(A), f \circ f(A)] = [f(A), A]$ ; ce point  $I$  doit donc être invariant par  $f$ , et on est ramené au cas vectoriel en prenant  $I$  pour origine.  $\square$

**PROPOSITION 5.10.** Une application  $s : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  est une *symétrie affine* s'il existe un s.e.v.  $W$  de  $E$ , et une v.l.a.  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{E}$  dirigée par un supplémentaire de  $W$ , tels que, pour tout  $M \in \mathcal{E}$  (voir figure 2):

- i)  $\overrightarrow{M s(M)} \in W$ ;
- ii) le milieu de  $[M, s(M)]$  appartient à  $\mathcal{D}$ .

Si  $\mathcal{D}$  se réduit à un point  $A$ ,  $W = E$ , et  $s$  est la *symétrie centrale* de centre  $A$ .

**Théorème de Thalès.**

Soit toujours  $W$  un s.e.v. de  $E$ , et  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$  deux sous-espaces affines de  $\mathcal{E}$ , respectivement dirigés par des supplémentaires  $V_1, V_2$  de  $W$ . Notons  $p_1$  [resp.  $p_2$ ] la restriction à  $\mathcal{D}_2$  [resp.  $\mathcal{D}_1$ ] de la projection de  $\mathcal{E}$  sur  $\mathcal{D}_1$  [resp.  $\mathcal{D}_2$ ] parallèlement à  $W$ . Il est alors facile de voir que  $p_2$  est une bijection affine de  $\mathcal{D}_1$  sur  $\mathcal{D}_2$  dont la réciproque est  $p_1$ ;

l'image  $M_2 = p_2(M_1)$  d'un point  $M_1$  de  $\mathcal{D}_1$  est déterminée par les conditions  $M_2 \in \mathcal{D}_2$  et  $\overrightarrow{M_1 M_2} \in W$  (voir figure 3).

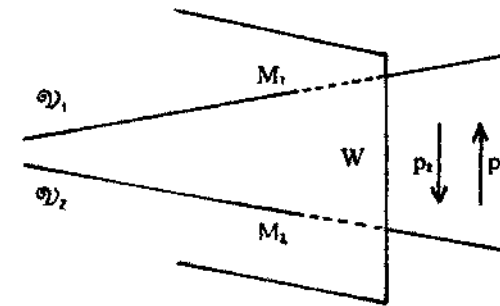


Fig. 3.

► Sous sa forme la plus générale, le théorème de Thalès n'est pas autre chose que l'affirmation du fait que la correspondance ainsi établie entre  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  est affine.

En particulier, si  $W$  est un hyperplan vectoriel, on a:

► **THÉORÈME 5.11.** Les hyperplans affines parallèles à un hyperplan fixe découpent des *divisions semblables* sur deux droites quelconques non parallèles à cet hyperplan.

**6. Plongement canonique d'un espace affine dans un espace vectoriel. Applications.**

Soit toujours  $\mathcal{E}$  un espace affine associé à un espace vectoriel  $E$ . Nous avons vu que le choix d'une origine dans  $\mathcal{E}$  permet d'identifier  $\mathcal{E}$  à  $E$ ; nous allons maintenant prouver que  $\mathcal{E}$  s'identifie *canoniquement* à un hyperplan affine d'un espace vectoriel  $F$ , lui-même isomorphe à  $E \times K$ .

La méthode consistera à associer, à chaque point  $A$  de  $\mathcal{E}$ , l'application  $f_A : \mathcal{E} \rightarrow E, M \mapsto \overrightarrow{MA}$ .

**LEMME PRÉLIMINAIRE.** Soit  $E$  un *espace vectoriel à gauche* sur le corps  $K$ , et  $X$  un ensemble quelconque. Alors l'ensemble  $\mathcal{X}$  des

*EX*

applications de  $X$  dans  $E$  est un espace vectoriel à gauche sur  $K$  pour les opérations usuelles d'addition des fonctions et de multiplication à gauche par un scalaire,

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x) \text{ et } \lambda f : x \mapsto \lambda f(x).$$

(La vérification est immédiate.)

Cela étant, l'espace vectoriel cherché  $F$  va être le s.e.v. de  $\mathcal{E}^E$  engendré par les  $f_A$ . Nous commençons donc par étudier cet espace  $F$ .

► PROPOSITION 6.1. Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{E}^E$  engendré par les fonctions  $f_A : \mathcal{E} \rightarrow E, M \mapsto \overrightarrow{MA}$ ; et soit  $f : \mathcal{E} \rightarrow E, M \mapsto \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$  un élément de  $F$  (5). Alors

a) La somme  $\sum_{i \in I} \lambda_i$  ne dépend que de la fonction  $f$ , et c'est une fonction linéaire de  $f$ , c'est-à-dire une application linéaire de  $F$  dans  $K$ , que nous noterons  $\mu$ .

b) Si  $\mu(f) \neq 0$ , il existe un unique point  $G$  de  $\mathcal{E}$  tel que  $f = \mu(f) f_G$ .

c) Si  $\mu(f) = 0$ ,  $f$  est constante.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que l'assertion a) n'est pas évidente, car il peut exister plusieurs systèmes  $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$  de points pondérés tels que  $f = \sum \lambda_i f_{A_i}$ ; mais elle résulte facilement du fait que, pour tout couple  $(M, P) \in \mathcal{E}^2$ , on a:

$$f(P) - f(M) = \left( \sum_{i \in I} \lambda_i \right) \overrightarrow{PM} \quad (1)$$

relation qui prouve l'existence et la linéarité de la fonction  $f \mapsto \mu(f)$ .

b) Si  $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$ , choisissons  $P$  arbitrairement dans  $\mathcal{E}$ . La relation (1) montre qu'il existe un unique point  $G$  de  $\mathcal{E}$  tel que  $f(G) = 0$ , ce point étant déterminé par  $\left( \sum_{i \in I} \lambda_i \right) \overrightarrow{PG} = f(P)$ ; et

5. Signalons ici que les éléments de  $F$  sont appelés « fonctions de Leibniz » et souvent utilisés dans la théorie des barycentres; mais remarquons que si  $K$  n'est pas commutatif, ces fonctions sont seulement semi-affines.

elle montre aussi que ce point  $G$  est le seul à vérifier  $(\forall M \in \mathcal{E}) f(M) = \left( \sum_{i \in I} \lambda_i \right) \overrightarrow{MG}$ ; nous voyons ainsi que le barycentre de la famille  $(A_i, \lambda_i)$  ne dépend que de la fonction  $f$ .

c) Enfin la dernière assertion résulte aussi de (1). □

COROLLAIRE  $F$  est la réunion ensembliste de l'espace vectoriel des fonctions constantes, et de l'ensemble des fonctions  $\lambda f_A ((\lambda, A) \in K^* \times \mathcal{E})$ .

PROPOSITION 6.2. Soit  $j$  l'application  $\mathcal{E} \rightarrow F, A \mapsto f_A$ ; et soit  $j_0$  l'application de  $E$  dans  $F$  qui, à tout  $u \in E$ , associe la fonction constante égale à  $u$  sur  $\mathcal{E}$ .

Alors  $j$  est affine, de partie linéaire  $j_0$ , donc injective; et  $j(\mathcal{E})$  est l'hyperplan affine  $F_1$  de  $F$ , d'équation  $\mu(f) = 1$ .

Démonstration. Pour tout couple  $(A, B) \in \mathcal{E}^2, j(B) - j(A)$  est la fonction constante  $f_B - f_A : M \mapsto \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$ , soit  $j(B) - j(A) = j_0(\overrightarrow{AB})$ . Donc  $j$  est affine,  $L(j) = j_0$ , et  $j$  est injective comme  $j_0$ .

D'autre part la proposition précédente montre que les fonctions  $f_A$  sont les éléments  $f$  de  $F$  vérifiant  $\mu(f) = 1$ . □

► THÉORÈME 6.3. A tout espace affine  $\mathcal{E}$ , associé au  $K$ -espace vectoriel  $E$ , on peut canoniquement attacher:

- un espace vectoriel  $F$ , isomorphe à  $E \times K$
- une forme linéaire non nulle  $\mu$  sur  $F$ .
- une injection affine  $j : \mathcal{E} \rightarrow F$  telle que  $j(\mathcal{E})$  soit l'hyperplan affine de  $F$  d'équation  $\mu(x) = 1$ .

Démonstration. Seul l'isomorphisme de  $F$  avec  $E \times K$  reste à prouver. Il suffit de remarquer que, pour tout  $A \in \mathcal{E}$ , l'application  $E \times K \rightarrow F, (u, \lambda) \mapsto j_0(u) + \lambda f_A$  est linéaire et bijective; l'isomorphisme ainsi défini dépend évidemment du choix du point  $A$ . □

Notons que l'hyperplan affine  $F_1$  est dirigé par l'hyperplan vectoriel  $F_0 = \text{Ker}(\mu) = j_0(E)$  constitué par les fonctions constantes, qui s'identifie à  $E$ .

*Remarques.* 1) Il est possible de définir directement une structure vectorielle sur l'ensemble  $E \cup (K^* \times \mathcal{G})$  sans passer par l'intermédiaire de l'espace vectoriel  $\mathcal{E}^E$ ; mais on est conduit à des vérifications pénibles.

2) L'intérêt du théorème 6.3 est de fournir un *plongement canonique*  $j$ , déterminé de manière unique par la donnée de  $\mathcal{G}$ .

► *Notations.* L'espace vectoriel  $F$  ainsi construit sera appelé le *prolongement vectoriel* de  $\mathcal{G}$ , et noté  $\widehat{\mathcal{G}}$ .

Si  $\mathcal{G}$  est de dimension  $n$ ,  $\widehat{\mathcal{G}}$  est de dimension  $n + 1$ . Nous allons voir que l'introduction de cet espace permet d'éclairer beaucoup de questions.

## 7. Applications du théorème de plongement.

### Interprétation vectorielle des barycentres.

Reprenons les notations du § 6. L'injection  $j$  nous permet d'identifier  $\mathcal{G}$  à l'hyperplan affine  $F_1 = \mu^{-1}(1)$  de  $F$ , tandis que sa partie linéaire  $j_0$  nous permet d'identifier  $E$  à l'hyperplan vectoriel  $F_0 = \text{Ker } \mu$ .

PROPOSITION 7.1. Soit  $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$  une famille finie de points pondérés de  $\mathcal{G}$ , les points  $A_i$  étant identifiés à des éléments de  $F_1$ . Pour que l'élément  $\sum_{i \in I} \lambda_i A_i$  de  $F$  appartienne à  $F_1$  [resp.  $F_0$ ] il faut

et il suffit que  $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$  [resp.  $\sum_{i \in I} \lambda_i = 0$ ].

*Démonstration.* Cela résulte de la relation  $\mu(\sum \lambda_i A_i) = \sum \lambda_i$ . □

► *Règle.* L'identification de  $\mathcal{G}$  à une partie de  $F = \widehat{\mathcal{G}}$  permet d'écrire sans précaution des combinaisons linéaires finies quelconques  $\sum \lambda_i A_i$  d'éléments de  $\mathcal{G}$ . Mais une telle combinaison ne représente un élément de  $\mathcal{G}$  que si  $\sum \lambda_i = 1$  (cet élément étant le barycentre du système  $(A_i, \lambda_i)$ ); et si  $\sum \lambda_i = 0$ ,  $\sum \lambda_i A_i$  représente un élément de  $E$ , égal à  $\sum \lambda_i \overrightarrow{AA_i}$  pour tout  $A \in \mathcal{G}$ .

*Applications.* 1) Pour que trois points  $A, B, C$ , de  $\mathcal{G}$  soient

*alignés*, il faut et il suffit qu'il existe des scalaires  $\lambda, \mu, \nu$ , non tous nuls, tels que

$$\lambda + \mu + \nu = 0 \text{ et } \lambda A + \mu B + \nu C = 0 \quad (1)$$

La relation (1) équivaut en effet à:  $\lambda \overrightarrow{CA} + \mu \overrightarrow{CB} = 0$ ; son intérêt tient au fait qu'elle est symétrique en  $A, B, C$  et qu'il est possible d'additionner de telles relations.

2) Si  $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$ , le barycentre du système  $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$  est le point d'intersection avec  $F_1$  de la droite vectorielle dirigée par l'élément  $\sum \lambda_i A_i$  de  $F$ .

3) Pour qu'une famille  $(A_i)_{i \in I}$  de points de  $\mathcal{G}$  soit *affinement libre* [resp. *génératrice*], il faut et il suffit que la famille  $(A_i)_{i \in I}$  soit libre [resp. génératrice] dans l'espace vectoriel  $F$ .

► *En particulier: un repère affine de  $\mathcal{G}$  est une base de  $F$  contenue dans  $F_1$ .*

### Interprétation vectorielle des applications affines.

Nous commencerons par établir un résultat général, indépendant de la théorie des prolongements vectoriels.

PROPOSITION 7.2. Soit  $F, F'$  deux espaces vectoriels sur le même corps  $K$ , et  $F_1$  [resp.  $F'_1$ ] un *hyperplan affine* de  $F$  [resp.  $F'$ ] ne passant pas par l'origine; notons  $F_0$  [resp.  $F'_0$ ] l'hyperplan *vectoriel* parallèle à  $F_1$  [resp.  $F'_1$ ].

a) Si  $\varphi : F \rightarrow F'$  est une application *linéaire* telle que  $\varphi(F_1) \subset F'_1$ , la restriction de  $\varphi$  à  $F_1$  est une application *affine* de  $F_1$  dans  $F'_1$  dont la partie linéaire est la restriction de  $\varphi$  à  $F_0$ .

b) Inversement, si  $f : F_1 \rightarrow F'_1$  est une application affine, il existe une *unique application linéaire*  $\varphi : F \rightarrow F'$  dont la restriction à  $F_1$  soit égale à  $f$ .

*Démonstration.* a) Si  $\varphi : F \rightarrow F'$  est linéaire, et si  $\varphi(F_1) \subset F'_1$ , on a pour tous points  $A, B$  de  $F_1$ :  $\varphi(B) - \varphi(A) = \varphi(\overrightarrow{AB})$ ; et  $\overrightarrow{AB} \in F_0$ . La restriction de  $\varphi$  à  $F_1$  est *affine*, de partie linéaire égale à  $\varphi_0 : F_0 \rightarrow F'_0$ ,  $u \mapsto \varphi(u)$ .

b) Inversement, soit  $f : F_1 \rightarrow F'_1$  une application affine. Fixons un point  $A$  de  $F_1$ , et désignons par  $D$  [resp.  $D'$ ] la droite vectorielle de  $F$  [resp.  $F'$ ] engendrée par  $A$  [resp.  $f(A)$ ] (voir figure 4). On a alors  $F = F_0 \oplus D$ ,  $F' = F'_0 \oplus D'$ ; et l'application linéaire cherchée doit vérifier les deux conditions suivantes:

- i)  $\varphi(A) = f(A)$
- ii) la restriction de  $\varphi$  à  $F_0$  est égale à la partie linéaire de  $f$ .

Or il existe une unique application linéaire  $\varphi$  de  $F$  dans  $F'$  vérifiant ces conditions ( $\varphi$  étant déterminée par ses restrictions aux s.e.v. supplémentaires  $F_0$  et  $D$  de  $F$ ); la restriction de  $\varphi$  à  $F_1$  est alors une application affine de même partie linéaire que  $f$  et prenant même valeur que  $f$  en  $A$ , donc égale à  $f$ , d'où le résultat.  $\square$

► Il existe donc une correspondance bijective entre les applications affines de  $F_1$  dans  $F'_1$  et les applications linéaires de  $F$  dans  $F'$  vérifiant  $\varphi(F_1) \subset F'_1$ .

D'autre part, si  $F' = F$  et  $F'_1 = F_1$ , cette correspondance respecte la composition des applications (le composé des restrictions de deux applications étant égal à la restriction de leur composée). Enfin, si  $\varphi$  est un automorphisme de  $F$ , et  $F_1$  un hyperplan affine de  $F$ , l'inclusion  $\varphi(F_1) \subset F_1$ , implique  $\varphi(F_1) = F_1$ : en effet  $\varphi(F_1)$  est un hyperplan affine de  $F$ , et il suffit d'appliquer le corollaire du théorème II 6.2, en nous ramenant au cas vectoriel par un changement d'origine dans  $F$ .

Nous pouvons donc énoncer:

**PROPOSITION 7.3.** Soit  $F$  un espace vectoriel, et  $F_1$  un hyperplan affine de  $F$  ne passant pas par l'origine. Il existe un isomorphisme du groupe des bijections affines de  $F_1$  sur le stabilisateur de  $F_1$  dans  $GL(F)$  (sous-groupe de  $GL(F)$  formé des automorphismes  $\varphi$  vérifiant  $\varphi(F_1) = F_1$ ).

► Ces résultats s'appliquent en particulier au cas où  $F, F'$  sont les prolongements vectoriels de deux espaces affines  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ , et  $F_1, F'_1$  les images de  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  dans les plongements canoniques  $j : \mathcal{E} \rightarrow F, j' : \mathcal{E}' \rightarrow F'$ : toute application affine de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}'$  s'identifie donc à une application linéaire  $\varphi$  de  $F$  dans  $F'$  vérifiant  $\varphi(F_1) \subset F'_1$ ; et le groupe des bijections affines de  $\mathcal{E}$  s'identifie au sous-groupe de  $GL(F)$  conservant l'hyperplan affine  $F_1$ .

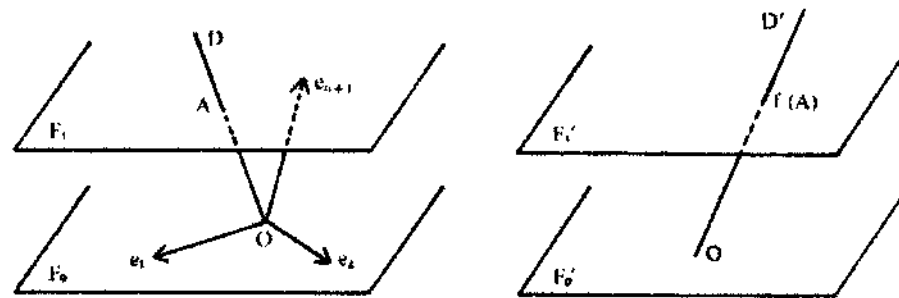


Fig. 4.

Cas de dimension finie.

Si l'espace affine  $\mathcal{E}$  est de dimension finie  $n$ , on peut choisir une base  $(e_1, \dots, e_{n+1})$  de  $F = \widehat{\mathcal{E}}$  telle que  $e_i \in F_0$  pour  $1 \leq i \leq n$  et  $e_{n+1} \in F_1$ ; alors  $(e_{n+1}; e_1, \dots, e_n)$  est un repère cartésien de  $F_1 = \mathcal{E}$ , d'origine  $e_{n+1}$  (voir figure 4).

Dans ce cas  $F_1$  est l'ensemble des points  $x = \sum_{i=1}^{n+1} x_i e_i$  de  $F$

tels que  $x - e_{n+1} \in F_0 = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ ; c'est donc l'hyperplan affine d'équation  $x_{n+1} = 1$  dans la base  $(e_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ . Les endomorphismes  $\varphi$  de  $F$  qui vérifient  $\varphi(F_1) \subset F_1$  sont ceux dont la matrice dans la base  $(e_i)$  est de la forme

$$\begin{bmatrix} & & & b_1 \\ & & & b_2 \\ & & & \vdots \\ & & & b_n \\ & & 0 \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

où  $A = (a_{ij})$  est une matrice carré d'ordre  $n$ . A l'endomorphisme  $\varphi$ , de matrice (2), correspond l'application affine  $f : F_1 \rightarrow F'_1$  dont les coordonnées dans le repère cartésien  $(e_{n+1}; e_1, \dots, e_n)$  sont

$$f_i(x) = \sum_{k=1}^n x_k a_{ik} + b_i \quad (1 \leq i \leq n) \quad (3)$$

On pourrait vérifier par le calcul matriciel que cette correspondance respecte bien la composition des applications. D'autre part l'endomorphisme  $\varphi$ , de matrice (2), est inversible ssi la matrice  $A$  est inversible, et vérifie alors  $\varphi(F_1) = F_1$ . On a donc:

► **THÉORÈME 7.4.** *Le groupe des bijections affines d'un espace affine de dimension  $n$  est isomorphe au sous-groupe du groupe linéaire  $GL(K^{n+1})$  constitué des matrices de la forme (2), où  $A$  appartient à  $GL(K^n)$ .*

En particulier, le groupe des bijections affines  $x \mapsto ax + b$  de  $K$  est isomorphe au sous-groupe de  $GL(K^2)$  formé des matrices de la forme  $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

**8. Caractérisation géométrique des applications semi-affines injectives.**

Dans ce qui suit nous désignons par  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  deux espaces affines, respectivement associés aux espaces vectoriels  $E, E'$  sur des corps quelconques  $K, K'$ ; et nous allons donner une caractérisation purement géométrique des applications semi-affines de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}'$  (6). Pour plus de clarté, nous commencerons par le cas d'applications *injectives*.

► **THÉORÈME 8.1.** *Supposons  $\dim(\mathcal{E}) \geq 2$ . Pour qu'une application injective  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  soit semi-affine il faut et il suffit qu'elle vérifie les deux conditions suivantes:*

- i) l'image de toute droite affine de  $\mathcal{E}$  est une droite affine de  $\mathcal{E}'$ .
- ii) les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.

*Démonstration.* Il est évident que ces conditions sont nécessaires. Pour prouver qu'elles sont suffisantes, nous procéderons par étapes en supposant toujours que  $f$  vérifie i) et ii).

a) *Les images par  $f$  de deux droites distinctes  $D_1, D_2$  de  $\mathcal{E}$  sont deux droites distinctes.*

Soit en effet  $D_1, D_2$  des droites de  $\mathcal{E}$  ayant même image  $f(D_1) = f(D_2)$ , et soit,  $A, B$  deux points distincts de leur image commune. Alors  $A, B$  ont des antécédents  $f^{-1}(A), f^{-1}(B)$  appartenant à la fois à  $D_1$  et  $D_2$ , et distincts (puisque  $f$  est injective), d'où  $D_1 = D_2$ .

6. Les démonstrations des §§ 8 et 9 utilisent en partie celles données dans [FR]; mais elles se situent dans un cadre plus général (corps quelconques, dimension non nécessairement finie). D'autre part l'utilisation de théorème 4.8 simplifie la présentation (voir § 9).

b) *L'application  $\varphi_A : E \rightarrow E, u \mapsto \overrightarrow{f(A)f(A+u)}$  est indépendante du choix de  $A$  dans  $\mathcal{E}$ .*

Soit en effet  $B$  un autre point de  $\mathcal{E}$ , et  $C, D$  tels que  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} = u$ . Si  $(ABDC)$  est un parallélogramme non aplati, il résulte de ii) et de a) que son image  $(f(A) f(B) f(D) f(C))$  est aussi un vrai parallélogramme, donc que

$$\overrightarrow{f(A)f(C)} = \overrightarrow{f(B)f(D)}, \text{ soit } \varphi_A(u) = \varphi_B(u).$$

Si les points  $A, B, C, D$  appartiennent à une même droite  $\mathcal{D}$ , l'hypothèse  $\dim(\mathcal{E}) \geq 2$  nous permet de choisir  $P, Q$  dans  $\mathcal{E} \setminus \mathcal{D}$  de manière que  $\overrightarrow{PQ} = u$ . D'après l'étude du cas précédent, on a alors:

$$\overrightarrow{f(A)f(C)} = \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{f(B)f(D)}$$

d'où  $\varphi_A(u) = \varphi_B(u)$ .

Cette application  $\varphi_A$  sera désormais notée  $\varphi$ .

c) *L'application  $\varphi : E \rightarrow E$  est injective et vérifie:*

$$(\forall (u, v) \in E^2) \quad \varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v). \quad (1)$$

L'injectivité de  $\varphi$  résulte immédiatement de celle de  $f$ . D'autre part,  $u, v$  étant donnés, choisissons  $A, B, C$  dans  $\mathcal{E}$  tels que  $\overrightarrow{AB} = u$  et  $\overrightarrow{BC} = v$ . On a alors

$$\varphi(u + v) = \overrightarrow{f(A)f(C)} = \overrightarrow{f(A)f(B)} + \overrightarrow{f(B)f(C)} = \varphi(u) + \varphi(v).$$

d) *Il existe une application  $\rho : K \rightarrow K'$  telle que:*

$$(\forall (\lambda, u) \in K \times E) \quad \varphi(\lambda u) = \rho(\lambda) \varphi(u). \quad (2)$$

*Démonstration.* Il nous suffit de trouver  $\rho$  vérifiant (2) pour  $u \neq 0$ . Le couple  $(\lambda, u)$  étant donné, choisissons  $A, B, C$  dans  $\mathcal{E}$  tels que  $\overrightarrow{AB} = u, \overrightarrow{AC} = \lambda u$ . Les points  $A' = f(A), B' = f(B)$  et  $C' = f(C)$  étant alignés, les vecteurs  $\overrightarrow{A'C'} = \varphi(\lambda u)$  et  $\overrightarrow{A'B'} = \varphi(u)$  sont colinéaires, d'où l'existence d'un scalaire, soit  $\theta(\lambda, u)$ , tel que  $\varphi(\lambda u) = \theta(\lambda, u) \varphi(u)$ . Il reste à prouver que  $\theta(\lambda, u)$  ne dépend pas du vecteur  $u$  (supposé non nul).



1) Si  $u, v$  sont deux vecteurs non colinéaires, il en est de même de  $\varphi(u)$  et  $\varphi(v)$ : sinon les images de deux droites  $D_1, D_2$ , passant par un même point  $A$  et respectivement dirigées par  $u, v$ , seraient confondues, ce qui est impossible d'après  $a$ ).

Pour tout  $\lambda \in K$  on a par ailleurs:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda(u + v)) &= \varphi(\lambda u) + \varphi(\lambda v) = \theta(\lambda, u) \varphi(u) + \theta(\lambda, v) \varphi(v) = \\ &= \theta(\lambda, u + v) \varphi(u + v) = \theta(\lambda, u + v) (\varphi(u) + \varphi(v)) \end{aligned}$$

d'où, puisque  $(\varphi(u), \varphi(v))$  est libre:

$$\theta(\lambda, u) = \theta(\lambda, u + v) = \theta(\lambda, v).$$

2) Si  $u, v$  sont colinéaires et non nuls, l'hypothèse  $\dim(E) \geq 2$  permet de choisir  $w \in E$  tel que  $(u, w)$  et  $(v, w)$  soient libres. On en déduit

$$(\forall \lambda \in K) \quad \theta(\lambda, u) = \theta(\lambda, w) = \theta(\lambda, v).$$

Pour tout  $\lambda \in K$ , l'application  $E \setminus \{0\} \rightarrow K, u \mapsto \theta(\lambda, u)$  est donc constante, et il nous suffit de désigner cette constante par  $\rho(\lambda)$ .

d) La fonction  $\rho : K \rightarrow K'$  est un isomorphisme de corps.

Choissant  $u \in E \setminus \{0\}$ , on voit d'abord que les relations  $\varphi((\lambda + \mu)u) = \varphi(\lambda u) + \varphi(\mu u)$  et  $\varphi(\lambda \mu u) = \rho(\lambda \mu) \varphi(u) = \rho(\lambda) \varphi(\mu u) = \rho(\lambda) \rho(\mu) \varphi(u)$  impliquent (puisque  $\varphi(u) \neq 0$ ):

$$\rho(\lambda + \mu) = \rho(\lambda) + \rho(\mu) \quad \text{et} \quad \rho(\lambda \mu) = \rho(\lambda) \rho(\mu)$$

ce qui prouve que  $\rho$  est un homomorphisme de corps.

Enfin, pour tout  $A \in \mathcal{E}$ , l'application  $\lambda \mapsto A + \lambda u$  est une bijection de  $K$  sur une droite  $D$ ; et la restriction de  $f$  à  $D$  est une bijection de  $D$  sur la droite  $f(D)$ . L'application composée  $K \rightarrow f(D), \lambda \mapsto f(A + \lambda u) = f(A) + \rho(\lambda) \varphi(u)$  est donc bijective: il en résulte que l'application  $\rho : K \rightarrow K'$  est bijective.

En conclusion,  $\rho$  est un isomorphisme de corps,  $\varphi$  est semi-linéaire associée à  $\rho$ , et  $f$  est semi-affine.  $\square$

### Cas du plan.

Si  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$  sont de dimension 2, la condition *ii*) du théorème 8.1 est une conséquence de *i*) et de l'injectivité de  $f$ . Nous pouvons donc énoncer:

► COROLLAIRE. Si  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  sont des plans affines et  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  une application injective telle que l'image d'une droite quelconque de  $\mathcal{E}$  soit une droite de  $\mathcal{E}'$ , alors  $f$  est semi-affine.

Remarque. Les hypothèses du théorème 8.1 sont vérifiées en particulier si  $f$  est une application injective de  $\mathcal{E}$  dans lui-même, telle que l'image de toute droite  $D$  soit une droite parallèle à  $D$ . Dans ce cas, on peut prouver directement que  $f$  est une dilatation (cf. exercice III.8).

## 9. Le théorème fondamental de la géométrie affine.

En partant du théorème 8.1 et en nous appuyant sur la caractérisation des variétés linéaires affines fournie par le théorème 4.8, nous allons établir:

► THÉORÈME 9.1. Soit  $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$  des espaces affines sur des corps  $K, K'$  différents de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Pour qu'une application  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  soit semi-affine, il suffit que

- i) L'image d'une droite quelconque de  $\mathcal{E}$  soit une droite de  $\mathcal{E}'$  ou se réduise à un point.
- ii) Le sous-espace affine de  $\mathcal{E}'$  engendré par  $f(\mathcal{E})$  soit de dimension  $\geq 2$ .

Nous décomposerons la démonstration en sept lemmes (les énoncés supposant toujours que  $f$  vérifie *i*) et *ii*).

LEMME 1. Si  $\mathcal{O}$  est une v.l.a. de  $\mathcal{E}$ ,  $f(\mathcal{O})$  est une v.l.a. de  $\mathcal{E}'$ .

Démonstration. Soit  $A' = f(A)$  et  $B' = f(B)$  deux points distincts de  $f(\mathcal{O})$ . Alors la droite  $(A'B')$  est l'image de la droite  $(AB)$  d'après *i*); et puisque la droite  $(AB)$  est contenue dans  $\mathcal{O}$ , la droite  $(A'B')$  est contenue dans  $f(\mathcal{O})$ ; le résultat découle alors du théorème 4.8.  $\square$

LEMME 2. Si  $\mathcal{O}'$  est une v.l.a. de  $\mathcal{E}'$ , et si l'ensemble  $\mathcal{O} = f^{-1}(\mathcal{O}')$  est non vide, c'est une v.l.a. de  $\mathcal{E}$ .

Démonstration. Si  $\mathcal{O}$  se réduit à un point, c'est évident. Sinon, pour tout couple  $(A, B)$  de points distincts de  $\mathcal{O}$ , l'image de la droite  $(AB)$  est contenue dans  $\mathcal{O}'$  d'après *i*). Donc la droite  $(AB)$  est contenue dans  $\mathcal{O}$ , et le théorème 4.8 montre que  $\mathcal{O}$  est une v.l.a.  $\square$

LEMME 3. Pour toute partie non vide  $X$  de  $\mathcal{E}$ , on a :

$$\text{Aff}(f(X)) = f(\text{Aff}(X)). \quad (1)$$

*Démonstration.*  $\text{Aff}(X)$  est une v.l.a. de  $\mathcal{E}$  contenant  $X$ ; d'après le lemme 1,  $f(\text{Aff}(X))$  est une v.l.a. de  $\mathcal{E}'$  contenant  $f(X)$ , ce qui implique l'inclusion  $\text{Aff}(f(X)) \subset f(\text{Aff}(X))$ .

De même, d'après le lemme 2,  $f^{-1}(\text{Aff}(f(X)))$  est une v.l.a. de  $\mathcal{E}$  contenant  $f^{-1}(f(X))$ , donc contenant  $X$ , d'où l'inclusion  $\text{Aff}(X) \subset f^{-1}(\text{Aff}(f(X)))$ , et en prenant les images par  $f$  :

$$f(\text{Aff}(X)) \subset \text{Aff}(f(X)).$$

Au total, on a bien l'égalité (1).  $\square$

LEMME 4. Soit  $D_1, D_2$  deux droites parallèles de  $\mathcal{E}$ . Si  $f(D_1)$  se réduit à un point, il en est de même de  $f(D_2)$ . Si  $f(D_1)$  est une droite,  $f(D_2)$  est une droite parallèle à  $f(D_1)$ .

*Démonstration.* Nous pouvons supposer  $D_1 \neq D_2$ . Alors  $\mathcal{O} = \text{Aff}(D_1 \cup D_2)$  est une v.l.a. de dimension 2 de  $\mathcal{E}$ , engendrée par deux points  $A, B$  de l'une des droites et un point  $C$  de l'autre: d'après les lemmes 2 et 3,  $f(\mathcal{O}) = \text{Aff}(f(A), f(B), f(C))$  est une v.l.a. de dimension  $\leq 2$ .

a) Montrons d'abord que l'on a  $f(D_1) = f(D_2)$  ou  $f(D_1) \cap f(D_2) = \emptyset$ .

Supposons en effet que  $f(D_1)$  et  $f(D_2)$  aient un point commun. Il existe alors un point  $A_1$  de  $D_1$  et un point  $A_2$  de  $D_2$  tels que  $f(A_1) = f(A_2)$ . Choisissons  $B_1 \in D_1 \setminus \{A_1\}$  et  $B_2 \in D_2 \setminus \{A_2\}$ , et posant toujours  $\mathcal{O} = \text{Aff}(D_1 \cup D_2)$ , on a, par application du lemme 3 :

$$f(\mathcal{O}) = \text{Aff}(f(A_1), f(A_2), f(B_1)) = \text{Aff}(f(A_1), f(B_1)) = f(D_1) \text{ et de même}$$

$$f(\mathcal{O}) = \text{Aff}(f(A_1), f(A_2), f(B_2)) = \text{Aff}(f(A_2), f(B_2)) = f(D_2) \text{ d'où}$$

$$f(D_1) = f(D_2).$$

Le résultat annoncé étant évident si  $f(D_1) = f(D_2)$ , nous supposons désormais  $f(D_1) \neq f(D_2)$ , donc  $f(D_1)$  et  $f(D_2)$  sans point commun.

b) Supposons que  $f(D_1)$  soit une droite de  $\mathcal{E}'$  et que  $f(D_1) \cap f(D_2)$  soit vide: alors  $f(\mathcal{O})$  est de dimension 2.

S'il existait deux points  $B, C$  de  $D_2$  tels que  $f(B) = f(C)$ , nous aurions, pour tout  $A \in D_1$ :  $\mathcal{O} = \text{Aff}(A, B, C)$  et  $f(\mathcal{O}) = \text{Aff}(f(A), f(B))$ ;

donc  $f(\mathcal{O})$  ne serait pas de dimension 2, contrairement à ce qui a été supposé. Il en résulte que  $f(D_2)$  est une droite.

Alors  $f(D_1)$  et  $f(D_2)$  sont deux droites sans point commun et contenues dans une même v.l.a. de dimension 2, donc parallèles.

c) Si  $f(D_1)$  se réduit à un point, on voit, en permutant les rôles de  $D_1, D_2$  et en appliquant le résultat b), que  $f(D_2)$  se réduit aussi à un point.  $\square$

LEMME 5. Si  $(P, Q)$  est un couple de points de  $\mathcal{E}'$  tel que les ensembles  $f^{-1}(P)$  et  $f^{-1}(Q)$  soient non vides,  $f^{-1}(P)$  et  $f^{-1}(Q)$  sont des v.l.a. ayant même direction.

*Démonstration.* D'après le lemme 2, nous savons que  $f^{-1}(P)$  et  $f^{-1}(Q)$  sont des v.l.a. de  $\mathcal{E}$ . Supposant  $P \neq Q$ , fixons un point  $A$  de  $\mathcal{O} = f^{-1}(P)$  et un point  $B$  de  $\mathcal{O}' = f^{-1}(Q)$ , et notons  $\tau$  la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$ . Pour tout  $M \in \mathcal{O}$ , la droite  $(B \tau(M)) = (\tau(A) \tau(M))$  est parallèle à la droite  $(AM)$ ; et puisque l'image de la droite  $(AM)$  se réduit au point  $P$ , celle de la droite  $(B \tau(M))$  se réduit au point  $Q = f(B)$ . Donc  $M \in \mathcal{O}$  implique  $\tau(M) \in \mathcal{O}'$ , et on a  $\tau(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}'$ .

En permutant les rôles de  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}'$  on obtient l'inclusion  $\tau^{-1}(\mathcal{O}') \subset \mathcal{O}$ , d'où  $\tau(\mathcal{O}) = \mathcal{O}'$ ; et  $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$  ont même direction.  $\square$

LEMME 6. Désignons par  $V$  la direction commune des v.l.a. non vides de  $\mathcal{E}$  de la forme  $f^{-1}(P)$ , où  $P \in \mathcal{E}'$ ; et soit  $\mathcal{E}/V$  le quotient de  $\mathcal{E}$  par la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  définie par:  $A \mathcal{R} B \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \in V$ .

Alors  $\mathcal{E}/V$  a une unique structure affine telle que la projection canonique  $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/V$  soit affine.

*Démonstration.* En prenant une origine  $A$  dans  $\mathcal{E}$  on se ramène au quotient de l'espace vectoriel  $\mathcal{E}_A$  par le sous-espace vectoriel  $V$ , et il suffit alors d'appliquer le théorème II.4.3, en prenant le point  $p(A)$  pour origine dans  $\mathcal{E}/V$ .  $\square$

On pourra noter que  $\mathcal{E}/V$  est l'espace des orbites de l'action du groupe de translations  $(V, +)$  sur  $\mathcal{E}$ : c'est l'ensemble des v.l.a. de direction  $V$  (voir § 2).

LEMME 7. Avec les notations du lemme 6,  $f$  se factorise en  $f = g \circ p$ , où  $g : \mathcal{G}/V \rightarrow \mathcal{G}'$  est une application injective et semi-affine; d'où il résulte que  $f$  est semi-affine.

*Démonstration.* L'existence et l'injectivité de  $g$  résultent du fait que la relation  $f(A) = f(B)$  équivaut à  $\overrightarrow{AB} \in V$  (voir lemme 5) donc à  $p(A) = p(B)$ . Pour prouver que  $g$  est semi-affine, nous allons montrer que  $g$  vérifie les hypothèses du théorème 8.1.

Soit donc  $\mathcal{D}$  une droite affine quelconque de  $\mathcal{G}/V$ , engendrée par deux éléments distincts  $\alpha, \beta$  de  $\mathcal{G}/V$ ; on vérifie sans peine que  $p^{-1}(\mathcal{D})$  est la v.l.a. de  $\mathcal{G}$  engendrée par  $p^{-1}(\alpha) \cup p^{-1}(\beta)$ .

D'après le lemme 3,  $g(\mathcal{D}) = f(p^{-1}(\mathcal{D}))$  est la v.l.a. engendrée par  $f(p^{-1}(\alpha)) \cup f(p^{-1}(\beta)) = \{g(\alpha), g(\beta)\}$ : donc (puisque  $g$  est injective)  $g(\mathcal{D})$  est une droite affine de  $\mathcal{G}'$ .

Enfin  $\mathcal{G}/V$  ne peut se réduire à un point ou une droite, car alors  $g(\mathcal{G}/V) = f(\mathcal{G})$  se réduirait à un point ou à une droite, contrairement à la condition *ii*). On a donc  $\dim(\mathcal{G}/V) \geq 2$ .

Il en résulte que  $g$  vérifie les conditions *i*) et *ii*) présentement imposées à  $f$ , à condition de remplacer  $\mathcal{G}$  par  $\mathcal{G}/V$ . Le lemme 4 montre alors que les images par  $g$  de deux droites parallèles  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$  de  $\mathcal{G}/V$ , sont deux droites parallèles. Finalement  $g$  vérifie toutes les hypothèses du théorème 8.1 (en remplaçant  $\mathcal{G}$  par  $\mathcal{G}/V$ ). Donc  $g$  est semi-affine, et il en est de même de  $f$ .  $\square$

Le théorème 9.1 est ainsi complètement établi.  $\square$

Ce résultat est particulièrement intéressant lorsque les corps  $K, K'$  sont confondus et n'admettent pas d'autre automorphisme que l'identité (par exemple si  $K = \mathbb{R}$  ou  $K = \mathbb{Z}_p$  avec  $p \neq 2$ ): dans ce cas nous obtenons une caractérisation purement géométrique des applications affines de  $\mathcal{G}$  dans  $\mathcal{G}'$ .

Par ailleurs il est évident que le théorème 9.1 cesserait d'être vrai si on omettait la condition *ii*): car toute application de  $\mathcal{G}$  sur une droite vérifie trivialement la condition *i*).

De même si  $K = K' = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , la condition *i*) est vérifiée par toute application de  $\mathcal{G}$  dans  $\mathcal{G}'$  (puisque toute droite de  $\mathcal{G}$  a  $\mathcal{G}'$  se réduit à deux points). Le théorème 9.1 n'est donc pas valable dans ce cas.

Enfin on ne peut remplacer l'hypothèse "l'image d'une droite est une droite ou un point" par l'hypothèse plus faible "les images de points alignés sont des points alignés", même en supposant  $f$  bijective.

Par exemple

$$f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^n, (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \mapsto (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)$$

est une bijection du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}^{2n}$  sur le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}^n$ , et l'image de toute droite de  $\mathbb{R}^{2n}$  par  $f$  est contenue dans une droite de  $\mathbb{C}^n$ ; mais  $f$  n'est pas semi-linéaire (puisque  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  ne sont pas isomorphes).