Théorie des Groupes et Géométrie

Contrôle Continu n°2 du vendredi 10 décembre 2021

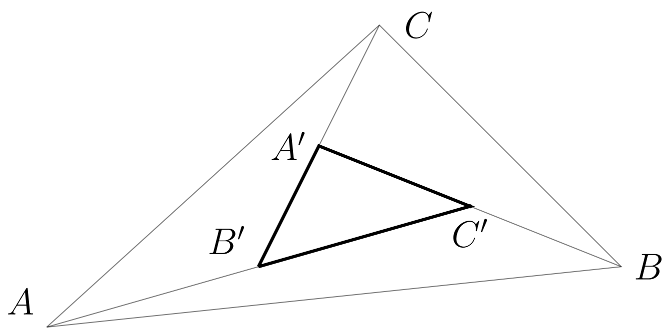
Exercice 1 (8 points)

1. (1pt) On choisit un point N sur la droite D et on écarte le compas à la longueur $r = MN$. On trace un arc de centre N qui intersecte D en un point P. Ensuite on trace un arc de centre M et un arc de centre P qui se coupent en un point Q. Par construction le quadrilatère $MNPQ$ a ses côtes opposés de la même longueur, c'est donc un parallélogramme, de sorte que la droite (MQ) est la parallèle à D passant par M.

2. (1pt) Avec la relation de Chasles, les conditions sur les M_i sont équivalentes à dire que $\overrightarrow{AM_i} = \frac{i}{n}\overrightarrow{AB}$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$. Il s'ensuit que les points M_i vérifient nécessairement $M_i = A + \overrightarrow{AM_i} = A + \frac{i}{n}\overrightarrow{AB}$ et que ces points vérifient bien les conditions demandées.

3. (1pt) On trace une droite D passant par A, distincte de (AB). Avec le compas réglé sur un écartement r aléatoire, on reporte sur la droite D des points $A = P_0, P_1, \ldots, B' = P_n$ tels que P_{i+1} est à distance r de P_i. Alors $(P_0, \ldots, P_n)$ est un découpage de $\{A, B'\}$ en n parties égales sur la droite D. Par le procédé de la question 1, pour chaque i on peut tracer la parallèle à la droite (BB') passant par P_i. Celle-ci coupe (AB) en un point M_i. D'après le théorème de Thalès $(M_0, \ldots, M_n)$ est un découpage de $\{A, B\}$ en n parties égales.

4.(a) (0.5pt)



4.(b) (1pt) On sait que $A' = \mathrm{m}(B', C)$, $B' = \mathrm{m}(C', A)$, $C' = \mathrm{m}(A', B)$. Ainsi, en appliquant les homothéties successives $h(C, 1/2)$, $h(B, 1/2)$ puis $h(A, 1/2)$ au point B' on obtient $B' \mapsto A' \mapsto C' \mapsto B'$. Ceci montre que le point B' est fixe pour la composée f.

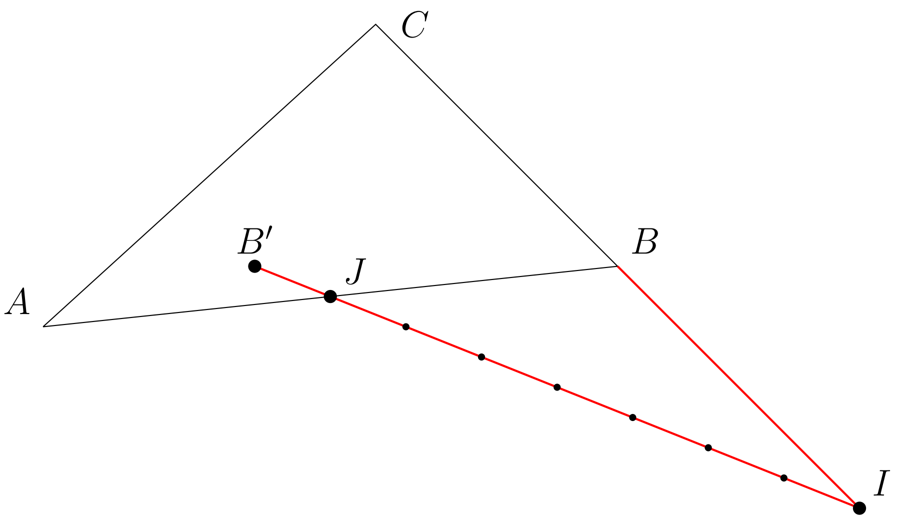
4.(c) (1pt) La linéarisée de f est la composée des trois linéarisées des homothéties qui la composent. C'est donc une homothétie vectorielle de rapport $(1/2)^3 = 1/8$. En conséquence, l'application f est égale à l'unique transformation affine ayant B' pour point fixe et de linéarisée l'homothétie de rapport $1/8$, c'est-à-dire l'homothétie affine $h(B', 1/8)$.

4.(d) (0.5pt) Notons J le milieu de $\{A, B\}$. Comme $B = \mathrm{m}(C, I)$, en appliquant au point I les homothéties successives qui composent f on obtient $I \xrightarrow{h(C,1/2)} B \xrightarrow{h(B,1/2)} B \xrightarrow{h(A,1/2)} J$. Ainsi l'image de I par f est le milieu J de $\{A, B\}$.

5. (2pt) Du fait que $f = h(B', 1/8)$ on déduit que $\overrightarrow{B'J} = \frac{1}{8}\overrightarrow{B'I}$ donc $\overrightarrow{JB'} = \frac{1}{7}\overrightarrow{IJ}$. En conséquence, partant de la seule donnée de ABC, à la règle et au compas on peut :

- reporter le point I tel que $B = \mathrm{m}(C, I)$,

- placer J le milieu de $\{A, B\}$,
- effectuer un découpage $M_0 = J, M_1, \ldots, M_7 = I$ de $\{I, J\}$ en sept parties égales,
- reporter le point B' sur la droite (IJ), symétrique du point M_1 par rapport à J,
- placer enfin $A' = \mathrm{m}(B', C)$ et $C' = \mathrm{m}(A', B)$.



Exercice 2 (4 points)

1. (1pt) Comme f est centrale, elle commute avec toute transformation affine $g \in G$, $g(x) = Cx + d$. Ceci signifie que $ACx + Ad + b = CAx + Cb + d$ pour tout $x \in E$. C'est équivalent à dire que $AC = CA$ et $Ad + b = Cb + d$, pour toute matrice inversible $C \in \mathrm{GL}(E)$ et tout vecteur $d \in E$. La première condition dit que A appartient au centre de $\mathrm{GL}(E)$, qui est composé des homothéties. Soit $\lambda \in k^\times$ le rapport de cette homothétie ; la deuxième condition dit que $(\lambda - 1)d = (C - \mathrm{I}_n)b$ pour tout (C, d). En particulier, en prenant $C = \mathrm{I}_n$ et pour d un vecteur non nul on trouve $\lambda = 1$. Finalement $A = \mathrm{I}_n$.

2. (1pt) La deuxième condition s'écrit maintenant $(C - \mathrm{I}_n)b = 0$ pour toute matrice $C \in \mathrm{GL}(E)$. Si $k \not\simeq \mathbb{F}_2$ il possède un élément inversible a distinct de 1. En prenant $C = a\mathrm{I}_n$, la matrice $C - \mathrm{I}_n$ est inversible et on obtient $b = 0$. Finalement $f = \mathrm{id}$ et $Z = \{1\}$.

3. (1pt) Le corps $\mathbb{F}_2$ possède 0 et 1 pour seuls éléments. Or $P(0) = P(1) = 1$ donc P n'a pas de racine dans $\mathbb{F}_2$. Notons C_P une matrice de polynôme caractéristique P (par exemple la matrice compagnon de P convient). Alors 0 n'est pas valeur propre de C_P donc $C_P \in \mathrm{GL}(E)$. De plus 1 n'est pas valeur propre de C_P donc $C_P - \mathrm{I}_n \in \mathrm{GL}(E)$. La condition $(C - \mathrm{I}_n)b = 0$ appliquée à $C = C_P$ fournit alors $b = 0$. Finalement $f = \mathrm{id}$ et $Z = \{1\}$.

4. (1pt) Si $k = \mathbb{F}_2$ et $n = 1$, la partie linéaire de chaque transformation affine $f(x) = Ax + b$ est une matrice inversible de taille 1 à coefficients dans $\mathbb{F}_2$, donc $A = 1$. Le vecteur de translation b est un élément de $\mathbb{F}_2$. L'application $G \to (\mathbb{F}_2, +)$, $f \mapsto f(0)$ est donc un isomorphisme de groupes. On voit que dans ce cas G est commutatif donc $Z = G \simeq \mathbb{F}_2$.

Exercice 3 (4 points)

1. (0.5pt) Les éléments de $\mathrm{GL}(E)$ sont des applications linéaires de E, elles envoient une droite de E sur une droite de E. Ainsi en posant $g \cdot D := g(D)$ on définit une action de $\mathrm{GL}(E)$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$ des droites de E.

2. (1pt) La donnée de l'action précédente est équivalente à celle d'un morphisme de groupes $\varphi : \mathrm{GL}(E) \to \mathfrak{S}_{\mathbb{P}(E)}$ dans le groupe des bijections de $\mathbb{P}(E)$. Le noyau de φ est composé des g qui fixent chaque droite, qui sont les homothéties (par un résultat classique du cours). Par propriété universelle du quotient, φ induit donc un morphisme injectif de groupes de $\mathrm{PGL}(E)$, quotient de $\mathrm{GL}(E)$ par le sous-groupe des homothéties, dans $\mathfrak{S}_{\mathbb{P}(E)}$.

3. (1.5pt) Rappelons que pour $E = \mathbb{F}_q^n$, le cardinal de $\mathrm{GL}(E)$ est $c := \prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i)$ et celui de $\mathrm{PGL}(E)$ est $c/(q-1)$. Lorsque $n = 2$ et $q = 3$ on trouve $|\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3)| = (3^2-1)(3^2-3)/2 = 24$. Comme $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_3)$ possède 4 éléments, le groupe de ses bijections $\mathfrak{S}_{\mathbb{P}(E)}$ est isomorphe au groupe S_4 de cardinal 24. L'injection de la question précédente est un morphisme injectif $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \to S_4$ entre deux groupes de cardinal 24, c'est donc un isomorphisme.

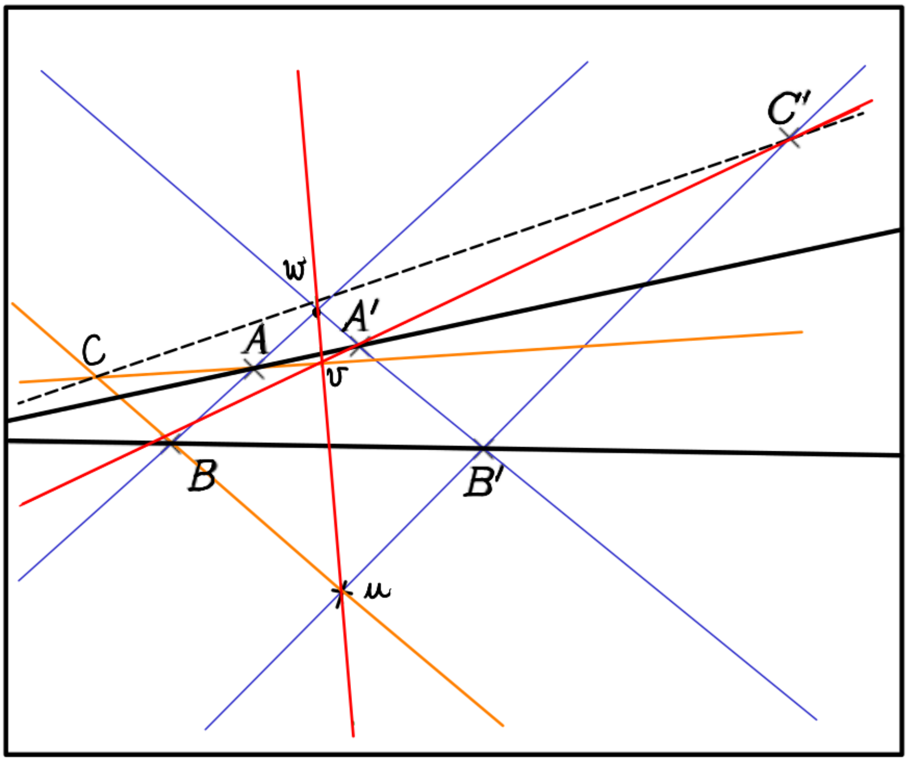
4. (1pt) L'énoncé rappelle que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$ est un sous-groupe de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3)$ d'indice $\mathrm{pgcd}(2, 2) = 2$. Comme $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3)$ est isomorphe à S_4 qui possède pour seul sous-groupe d'indice 2 le groupe alterné A_4, on déduit un isomorphisme $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq A_4$.

Exercice 4 (1 point)

(1pt) La fonction $y_0 = x - 1$ est solution de l'équation. Si y est une solution générale, alors $z := y - y_0$ est solution de l'équation $z' + z = 0$ et $w = \mathrm{e}^x z$ est solution de l'équation $w' = 0$. On déduit que w est constante, donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $y = y_0 + c\mathrm{e}^{-x}$. L'ensemble des solutions de l'équation de l'énoncé est donc un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 1, de direction l'espace vectoriel des solutions de $z' + z = 0$, lui-même isomorphe à $\mathbb{R}$.

Exercice 5 (7 points)

(2pt)



1. (0.5pt) Le point w est tracé comme intersection de (AB) et $(A'B')$, représentées en bleu.

2. (0pt) Ici aucune explication n'est utile.

3. (1pt) Le point v appartient aux droites $(A'C')$ et (uw) donc on le trace comme intersection de ces droites, représentées en rouge.

4. (1.5pt) Le point C appartient aux droites (Av) et (Bu) donc on le trace comme intersection de ces droites, représentées en orange. La droite (CC') représentée en pointillés contient S grâce au théorème de Desargues, puisque nous avons fait la construction de telle manière que u, v, w sont alignés.

5. (2pt) Le fait que (AA') et (BB') soient parallèles n'empêche pas de faire la même construction. Si elles sont parallèles, lorsqu'on plonge le plan affine dans un plan projectif P (sa complétion projective), ces droites se coupent en un point S situé sur la droite à l'infini. Le théorème de Desargues (dans sa version projective) s'applique dans P et nous dit que si u, v, w sont alignés alors $S \in (CC')$. Comme l'intersection de (AA') et (CC') (c'est-à-dire le point S) est à l'infini, dans le plan affine ces droites ne se rencontrent pas, c'est-à-dire qu'elles sont parallèles. On obtient le résultat souhaité.

Exercice 6 (4 points)

1. (2pt) Soient N le point de coordonnées $(0, 1)$ et M_t un point de l'axe réel, de coordonnées $(t, 0)$ avec $t \in \mathbb{R}$. La droite (NM_t) a pour équation $x = t(1-y)$. Pour calculer son intersection avec le cercle unité d'équation $x^2+y^2 = 1$, en injectant $x = t(1-y)$ on obtient $t^2(1-y)^2 = 1-y^2 = (1-y)(1+y)$, soit encore $(y-1)(t^2(1-y)-(1+y)) = 0$. La solution $y = 1$ correspond au point N. Le deuxième point d'intersection a pour ordonnée $y(t) = (t^2-1)/(t^2+1)$ et donc pour abscisse $x(t) = 2t/(t^2+1)$. Pour étendre la fonction obtenue $\varphi : \mathbb{R} \to S^1$, $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ en une fonction $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to S^1$, on observe que les réels t sont les points $(u : v)$ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ complémentaires du point à l'infini $v = 0$, c'est-à-dire ceux pour lesquels $v \neq 0$, obtenus en posant $t = u/v$. En injectant ceci dans les équations de φ on arrive à l'expression $f(u : v) = (2uv/(u^2+v^2), (u^2-v^2)/(u^2+v^2))$.

Vérifions que f est bijective. D'abord on note que φ induit une bijection $\mathbb{R} \to S^1 \setminus \{N\}$: en effet, l'équation $x = t(1-y)$ de la droite (NM_t) nous fournit une expression $\psi(x, y) = x/(1-y)$ pour l'inverse $\psi : S^1 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}$. Comme $\varphi = f_{|\mathbb{R}}$ et f envoie le point à l'infini $(u : v) = (1 : 0)$ sur N, ceci suffit à montrer que f est une bijection.

2. (0.5pt) Si f est continue, comme $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est compact et S^1 est séparé, alors f est une application fermée (c'est-à-dire que l'image de tout fermé est un fermé). Comme f est bijective, ceci démontre que sa réciproque est continue ; donc f est un homéomorphisme.

3. (1.5pt) Les ouverts $U = \{(u : v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R});\ v \neq 0\}$ (homéomorphe à $\mathbb{R}$ avec la coordonnée $t = u/v$ comme on l'a vu) et $V = \{(u : v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R});\ u \neq 0\}$ (homéomorphe à $\mathbb{R}$ avec la coordonnée $\tau = v/u$) recouvrent $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ donc il suffit de démontrer que les restrictions $f_{|U}$ et $f_{|V}$ sont continues. L'application $f_{|U}$ n'est autre que la fonction φ, dont les composantes $x(t)$ et $y(t)$ sont des fractions rationnelles à dénominateur ne s'annulant pas ; donc $f_{|U}$ est continue. La fonction $f_{|V}$ est donné par $\tau \mapsto (2\tau/(\tau^2+1), (1-\tau^2)/(1+\tau^2))$. Les mêmes raisons que celles qui viennent d'être données montrent que $f_{|V}$ est continue.