Théorie des Groupes et Géométrie

Contrôle Continu n°2
Vendredi 10 décembre 2021
2 heures

Il n'est pas nécessaire de faire l'intégralité du contrôle pour avoir la note maximale.
Les documents et les téléphones sont interdits.

Composer les exercices 1, 2, 3 sur une copie n°1 qui sera corrigée par M. Romagny

Exercice 1, environ sur 8 points

On travaille dans un plan affine réel $\mathcal{E}$. La règle utilisée dans les différentes questions est *non graduée*. Les questions 4 et 5 peuvent être traitées en admettant le résultat des questions 1 à 3.

1. Soient D une droite et M un point. Décrivez avec les mots du lycée un procédé de construction à la règle et au compas de la droite parallèle à D passant par M.
2. Soient A et B deux points de $\mathcal{E}$ et $n \geqslant 2$ un entier. Démontrez avec les mots du master de Mathématiques qu'il existe un unique $(n+1)$-uplet de points $(M_0, \dots, M_n)$ tels que $M_0 = A$, $M_n = B$ et $\overrightarrow{M_{i-1}M_i} = \frac{1}{n}\overrightarrow{AB}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.
3. Un tel uplet est appelé *découpage de* $\{A, B\}$ *en* n *parties égales*. Décrivez un procédé de construction à la règle et au compas d'un tel découpage basé sur le théorème de Thalès.

Lorsque $n = 2$, le découpage est de la forme (A, M_1, B) et on note $\mathrm{m}(A, B) := M_1$ le *milieu* de $\{A, B\}$. On se donne maintenant un triangle ABC. On souhaite construire trois points A', B', C' tels que $A' = \mathrm{m}(B', C)$, $B' = \mathrm{m}(C', A)$ et $C' = \mathrm{m}(A', B)$.

4. *Analyse.*
   (a) Dessinez un triangle $A'B'C'$ puis un triangle ABC de telle sorte que les conditions décrites ci-dessus soient remplies.
   (b) On note $h(O, \lambda)$ l'homothétie de centre O et de rapport λ. Soit f la transformation affine $h(A, 1/2) \circ h(B, 1/2) \circ h(C, 1/2)$. Montrez que l'un des points de la figure est fixe pour f.
   (c) Quel est la linéarisée de f ? Quelle est l'application f ?
   (d) Soit I le point défini par $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{CB}$. Indiquez quelle est l'image de I par f.
5. *Synthèse.* On revient au triangle ABC initial. Déduisez de l'analyse précédente un procédé de construction à la règle et au compas du triangle $A'B'C'$.

Exercice 2, environ sur 4 points

Dans cet exercice on étudie le centre du groupe affine d'un espace affine de dimension $n > 0$ sur un corps k. En choisissant un point de l'espace puis une base de sa direction, on se ramène immédiatement à l'étude du groupe affine $G := \mathrm{GA}(E)$ de l'espace vectoriel $E = k^n$. On note Z son centre.

1. Soit $f \in Z$ écrite sous la forme $f(x) = Ax + b$. Démontrez que A est une matrice d'homothétie puis que le rapport de cette homothétie est égal à 1.
2. On suppose que $k \not\simeq \mathbb{F}_2$. Démontrez que $f = \mathrm{id}$.
3. On suppose que $k = \mathbb{F}_2$ et $n > 1$. Montrez que le polynôme $P = X^n + X + 1$ est sans racine dans $\mathbb{F}_2$ et déduisez-en que $f = \mathrm{id}$.
   (*Indication : on pourra utiliser, sans démonstration, l'existence d'une matrice de polynôme caractéristique P.*)
4. On suppose que $k = \mathbb{F}_2$ et $n = 1$. Déterminez Z.

Exercice 3, environ sur 4 points

Soit $E = \mathbb{F}_q^n$. On rappelle que $\mathrm{PSL}(E)$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{PGL}(E)$, d'indice $\mathrm{pgcd}(n, q-1)$.

1. Rappeler pourquoi $\mathrm{GL}(E)$ agit sur $\mathbb{P}(E)$.
2. Montrer qu'il existe une injection de $\mathrm{PGL}(E)$ dans le groupe des bijections de $\mathbb{P}(E)$.
3. Montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq S_4$.
4. Montrer que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq A_4$.

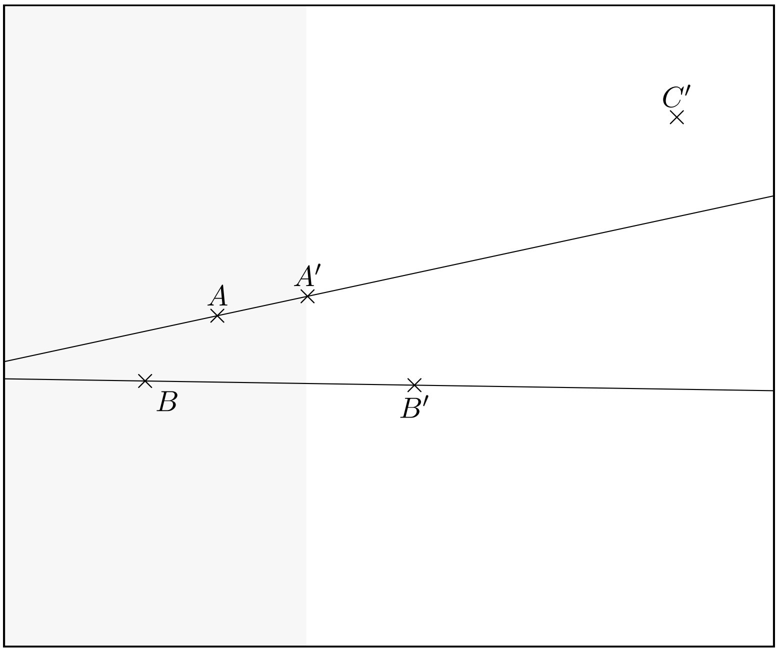
Composer les exercices 4, 5, 6 sur une copie n°2 qui sera corrigée par S. Rostam

Exercice 4, environ sur 1 point

Montrez que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + y = x$, où l'inconnue est une fonction dérivable $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, est un $\mathbb{R}$-espace affine $\mathcal{E}$. Précisez sa direction E et sa dimension n.

Exercice 5, environ sur 7 points

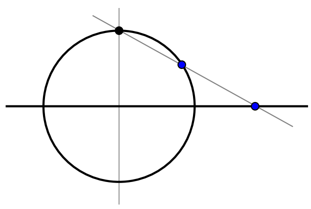
Dans un plan affine, soient (AA') et (BB') deux droites sécantes en un point S. Sur la figure suivante, on veut placer, à la règle (non graduée) seule et sans faire de construction en dehors du cadre, un point C tel que (CC') passe par S. On pourra compléter la figure directement sur le sujet.



Soient les points $u = (BC) \cap (B'C')$, $v = (AC) \cap (A'C')$, $w = (AB) \cap (A'B')$. Le théorème de Desargues affirme que si u, v, w sont alignés alors $S \in (CC')$. L'idée de la construction est d'utiliser cette contrainte pour placer les points C, u, v, w dans un ordre approprié. Pour les questions de tracé on soignera le dessin et on donnera une brève explication lorsque c'est utile.

1. Placez le point w.
2. Dans la partie grisée située à gauche du point A', placez un point u situé sur $(B'C')$.
3. Placez le point v.
4. Placez le point C et tracer la droite (CC'). Pourquoi (CC') contient-elle S ?
5. Étant données deux droites parallèles et un point situé sur aucune des deux droites, expliquez comment tracer à la règle (non graduée) seule la parallèle à ces deux droites passant par ce point.

Exercice 6, environ sur 4 points



1. Utilisez une projection stéréographique pour exhiber une bijection f entre $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ et un cercle.
2. Montrez que si f est continue, c'est un homéomorphisme.
3. (Bonus) Montrez que f est continue.