UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Théorie des Groupes et Géométrie

Contrôle Continu n°2
Mercredi 16 décembre
Durée : 2 heures + 25 min pour transmettre votre copie

- L'usage de tout logiciel, d'internet et les communications extérieures sont interdites.
- Les notes de cours et de TD sont autorisées.
- La clarté de la rédaction constitue une part essentielle de l'évaluation.
- Les réponses doivent être justifiées.
- L'épreuve commence à **10h**, vos copies doivent me parvenir **avant 12h25**, sauf pour les 1/3-temps.
- Vous devez remettre votre copie sous la forme d'**un et seul** fichier **pdf**.

Il n'est pas nécessaire de faire l'intégralité du contrôle pour avoir la note maximale.

Exercice 1, environ sur 7.5 points

Soit q une puissance d'un nombre premier et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $d \in \{1, \dots, n\}$.

a. Montrer que l'application $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{F}_q) \times \mathbb{F}_q^{n+1} \ni (f, x) \mapsto f(x) \in \mathbb{F}_q^{n+1}$ induit une action de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{F}_q)$ sur l'ensemble $G(d)$ des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{F}_q^{n+1}$ de dimension d.

b. Montrer que cette action est transitive.

c. Déterminer le cardinal du stabilisateur d'un élément de $G(d)$ pour cette action. *Indication : on pourra raisonner avec une matrice par blocs.*

d. En déduire le nombre de sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ de dimension d pour $d \in \{0, \dots, n-1\}$.

2. **a.** Quel est le cardinal de $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$?

b. Montrer que l'action de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{F}_q)$ sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ est 2-transitive. *On rappelle qu'une action d'un groupe G sur un ensemble X est 2-transitive si pour tout $(x, x') \in X^2$ et $(y, y') \in X^2$ avec $x \neq x'$ et $y \neq y'$, il existe $g \in G$ tel que $gx = y$ et $gx' = y'$.*

3. **a.** Quel est le nombre de droites de $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$?

b. Le Dobble est un jeu constitué de 55 cartes, chacune d'entre elles comportant huit symboles différents. Deux cartes ont toujours exactement un symbole en commun. Le but du jeu est d'être le premier à trouver le symbole commun entre deux cartes données. Expliquer comment construire un Dobble à 183 cartes, en donnant le nombre total de symboles et le nombre de symboles sur chaque carte.

Exercice 2, environ sur 8 points

Soit k un corps et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Les trois questions sont indépendantes.

1. Soit $m := \#\mu_n(k)$. *On rappelle que nécessairement la caractéristique de k ne divise pas m, en d'autres termes $m \neq 0$ dans k.*

- **a.** Montrer que toute transvection de $\mathrm{GL}_n(k)$ est la puissance m-ième d'une transvection.
- **b.** Soit $A \in \mathrm{SL}_n(k)$. On suppose que pour tout $B \in \mathrm{SL}_n(k)$, il existe $\lambda \in \mu_n(k)$ tel que $AB = \lambda BA$.
  - **i.** Montrer que pour tout $B \in \mathrm{SL}_n(k)$ on a $AB^m = B^m A$.
  - **ii.** En déduire que A commute avec toutes les transvections.
  - **iii.** En déduire que $A \in \mathrm{Z}(\mathrm{SL}_n(k))$.
- **c.** En déduire que $\mathrm{Z}(\mathrm{PSL}_n(k)) = \{1\}$.

2. On suppose dans cette question que $(n, k) \neq (2, \mathbb{F}_2), (2, \mathbb{F}_3)$. Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant la simplicité de $\mathrm{PSL}_n(k)$.

3.
- **a.** Soit $A \in \mathrm{GL}_n(k)$ une matrice qui n'est pas une homothétie.
  - **i.** Montrer qu'il existe un vecteur x tel que x et $y := Ax$ ne sont pas colinéaires.
  - **ii.** Montrer qu'il existe une transvection $T \in \mathrm{GL}_n(k)$ telle que $Tx = x$ et $Ty = x + y$.
  - **iii.** En déduire que $[T, A] = TAT^{-1}A^{-1}$ n'est pas une homothétie.
- **b.** En déduire que $\mathrm{Z}(\mathrm{PGL}_n(k)) = \{1\}$. *Bien sûr cette démonstration fonctionne également pour* $\mathrm{PSL}_n(k)$.

Exercice 3, environ sur 4.5 points

Soit $ABCD$ un parallélogramme non aplati du plan affine $\mathbb{R}^2$, que l'on plonge dans le plan projectif réel $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Soit $O = (AC) \cap (BD)$ le centre de $ABCD$, I le milieu du côté $[A, B]$, $\Phi = (AB) \cap (CD)$ et $\Psi = (AD) \cap (BC)$.

1. Faire une figure dans le plan affine $\mathbb{R}^2$.

Représenter les points de la figure (A, B, C, D, I, O, Φ et Ψ) après avoir envoyé :

2. la droite (AB) à l'infini ;

3. la droite (AC) à l'infini ;

4. la droite (OI) à l'infini.

Pour chaque point $A, B, C, D, I, O, \Phi, \Psi$ on précisera s'il est ou non à l'infini dans la nouvelle représentation.

On prendra soin de préciser les différentes étapes des constructions. On rappelle que l'on peut commencer en plaçant arbitrairement les images (non alignées) de trois points non alignés de la figure initiale.

Exercice 4, environ sur 3 points

1. Déterminer l'unique homographie f de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ vérifiant :

$$f(0) = 2, \qquad f(1) = 0, \qquad f\left(\frac{1+i}{2}\right) = \infty.$$

2. Quelle est l'image de $\mathbb{R}$ par f ?

3. Calculer f^2.