Théorie des Groupes et Géométrie

Contrôle Continu n°1
Vendredi 22 octobre 2021
2 heures

Il n'est pas nécessaire de faire l'intégralité du contrôle pour avoir la note maximale.
Les documents et les téléphones sont interdits.

Composer les exercices 1, 2, 3 sur une copie n°1 qui sera corrigée par M. Romagny

Exercice 1, environ sur 3 points

Si A et B sont deux parties d'un groupe G, on note $[A, B]$ le sous-groupe engendré par les commutateurs $[a, b]$ avec $a \in A$ et $b \in B$. On définit deux suites de sous-groupes de la manière suivante :

$$D^0(G) = G \quad \text{et} \quad D^{i+1}(G) = [D^i(G), D^i(G)] \quad \text{pour tout } i \geqslant 0,$$
$$C^0(G) = G \quad \text{et} \quad C^{i+1}(G) = [G, C^i(G)] \quad \text{pour tout } i \geqslant 0.$$

On dit que G est *résoluble* lorsque $D^i(G) = 1$ pour i assez grand, et *nilpotent* lorsque $C^i(G) = 1$ pour i assez grand.

1. Montrer qu'un groupe nilpotent est résoluble.

2. Montrer que le groupe $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b;\ a \in \mathbb{R}^\times,\ b \in \mathbb{R}\}$ est résoluble.

3. Montrer que $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ n'est pas nilpotent.

Exercice 2, environ sur 2 points

Montrer que le centre d'un p-groupe n'est pas réduit à l'élément neutre.

Exercice 3, environ sur 6 points

Soient k un corps et E un k-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. On fixe une droite vectorielle D de E et on pose $\mathrm{GL}_D(E) = \{u \in \mathrm{GL}(E);\ u_{|D} = \mathrm{Id}_D\}$.

1. On note $\pi : E \to E/D$ la projection canonique.

(a) Montrer que pour tout $u \in \mathrm{GL}_D(E)$, il existe un unique $\bar{u} \in \mathrm{GL}(E/D)$ tel que $\pi \circ u = \bar{u} \circ \pi$.

(b) Montrer que $p : \mathrm{GL}_D(E) \to \mathrm{GL}(E/D)$ défini par $p(u) = \bar{u}$ est un morphisme de groupes.

2. On note U_D la partie de $\mathrm{GL}_D(E)$ composée de Id_E et des transvections de droite D. Montrer que $\ker(p) = U_D$.

3. Soit F un supplémentaire de D dans E. On identifie $\mathrm{GL}(F)$ à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_D(E)$ en associant à une application linéaire $v \in \mathrm{GL}(F)$ l'application linéaire $\tilde{v} \in \mathrm{GL}_D(E)$ telle que $\tilde{v}_{|F} = v$ et $\tilde{v}_{|D} = \mathrm{Id}_D$. Montrer que $p_{|\mathrm{GL}(F)} : \mathrm{GL}(F) \longrightarrow \mathrm{GL}(E/D)$ est un isomorphisme.

4. En déduire que p est surjectif et qu'on a un isomorphisme $\mathrm{GL}_D(E) \simeq U_D \rtimes \mathrm{GL}(F)$.

Composer les exercices 4, 5 sur une copie n°2 qui sera corrigée par S. Rostam

Exercice 4, environ sur 4 points

Le but de l'exercice est de déterminer les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ pour $n \geqslant 5$.

1. Soit H un sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que $H \cap \mathfrak{A}_n$ est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{A}_n$. En déduire que H contient $\mathfrak{A}_n$ ou que $H \cap \mathfrak{A}_n = \{1\}$.

2. On suppose que $H \cap \mathfrak{A}_n = \{1\}$. Montrer que la restriction à H du morphisme signature est injective. Montrer que H est inclus dans le centre de $\mathfrak{S}_n$. En déduire que $H = \{1\}$.

3. On suppose que H contient $\mathfrak{A}_n$. Montrer alors que $H = \mathfrak{S}_n$ ou $H = \mathfrak{A}_n$ suivant l'indice de H dans $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 5, environ sur 7 points

1. Soit G un groupe fini et $a, b \in G$ deux éléments d'ordres m et n. Montrer que si a et b commutent et m et n sont premiers entre eux, alors ab est d'ordre mn.

Dans la suite de l'exercice, on souhaite démontrer que l'ordre du produit ab peut prendre des valeurs arbitraires. Plus précisément, étant donnés trois entiers $m, n, r > 1$ on veut montrer qu'il existe un groupe fini G avec des éléments a d'ordre m et b d'ordre n tels que ab est d'ordre r.

2. Soit p un nombre premier qui ne divise pas $2mnr$. Montrer qu'il existe $\alpha \geqslant 1$ tel que $p^\alpha = 1$ dans l'anneau $\mathbb{Z}/2mnr\mathbb{Z}$.

3. On note $q = p^\alpha$ et on rappelle que le groupe multiplicatif $\mathbb{F}_q^\times$ du corps fini $\mathbb{F}_q$ est cyclique. Montrer qu'il existe trois éléments $u, v, w \in \mathbb{F}_q^\times$ qui sont d'ordres respectifs $2m$, $2n$, $2r$.

4. On pose $t = (w + w^{-1}) - (uv + u^{-1}v^{-1})$ et on introduit les matrices :

$$a = \begin{pmatrix} u & 1 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} v & 0 \\ t & v^{-1} \end{pmatrix}.$$

Montrer que a et b sont diagonalisables et en déduire leur ordre.

5. Montrer que la matrice ab est diagonalisable et donner son ordre.

6. Montrer que le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ possède un unique élément d'ordre 2 qui est $-\mathrm{I}_2$.

7. En déduire un groupe G qui répond à la question de l'énoncé.