Théorie des Groupes et Géométrie

Contrôle Continu n°1
Vendredi 16 octobre
2 heures

Il n'est pas nécessaire de faire l'intégralité du contrôle pour avoir la note maximale.
Tous les documents sont interdits.

Composer les questions de cours et l'exo 1 sur une copie qui sera corrigée par Salim Rostam. Et, sur une autre copie, l'exo 2 et l'exo 3 qui sera corrigée par Ludovic Marquis.

Questions de cours, environ sur 5 points **5pts**

1. Montrer que tout groupe d'ordre 2020 est résoluble. *On pourra chercher des p-Sylows.* 2 pts

2. Donner un exemple de groupe d'ordre 2020 non abélien. 1 pt

3. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines de directions respectives E et F.

a. Rappeler la définition d'une application affine $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$. 1 pt

b. Soit $\mathcal{G}$ un espace affine de direction G. Montrer que si $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ et $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ sont deux applications affines alors leur composée $\psi \circ \phi : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ est une application affine, de linéarisé $\overrightarrow{\psi \circ \phi} = \overrightarrow{\psi} \circ \overrightarrow{\phi}$. 1 pt

Exercice 1, environ sur 3 points **3 pts**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un élément $x \in \mathbb{Z}_{/n\mathbb{Z}}$ est un *carré* s'il existe $y \in \mathbb{Z}_{/n\mathbb{Z}}$ tel que $x = y^2$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}_{/n\mathbb{Z}}$ est intègre si et seulement si n est premier. 1 pt

On suppose maintenant que $n = p$ est premier et on note $(\mathbb{Z}_{/p\mathbb{Z}})^\times := \mathbb{Z}_{/p\mathbb{Z}} \setminus \{0\}$.

2. On suppose ici $p \neq 2$. En considérant l'application $f : (\mathbb{Z}_{/p\mathbb{Z}})^\times \to (\mathbb{Z}_{/p\mathbb{Z}})^\times$ donnée par $x \mapsto x^2$, montrer que $\mathbb{Z}_{/p\mathbb{Z}}$ possède exactement $\frac{p+1}{2}$ carrés. 1 pt

3. Montrer que tous les éléments de $\mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}}$ sont des carrés. 1 pt

Composer la suite sur une nouvelle copie.

Exercice 2, environ sur 8 points **8 pts**

Soient p, q deux nombres premiers avec $q \neq 2$ et q divisant l'ordre de du groupe linéaire $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ sur le corps $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}_{/p\mathbb{Z}}$ à p éléments. Le but de cet exercice est de montrer que les q-Sylows de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ sont abéliens. *Tout au long de l'exercice, on peut utiliser librement le fait suivant : Pour tout corps k, tout sous-groupe fini du groupe multiplicatif $k^\times$ est cyclique.*

1. Montrer que le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ est d'ordre $(p-1)^2 p(p+1)$. 1 pt

2. Donner un exemple de p-Sylow de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$. 0.5 pt

3. Montrer que les p-Sylows de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ sont cycliques. 0.5 pt

On suppose maintenant que $q \neq p$. On rappelle que q est un diviseur premier impair de l'ordre de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$.

4. Montrer que q divise soit $p-1$ soit $p+1$, mais pas les deux. 0.5 pt

5. Montrer que si $p = 2$ alors les q-Sylows de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ sont cycliques.
On rappelle que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$. 0.5 pt

On suppose dorénavant que $p \neq 2$. On suppose que q divise $p-1$.

6. Exhiber un sous-groupe abélien de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ d'ordre $(p-1)^2$. 1 pt

7. En déduire un exemple de q-Sylow de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$. 0.5 pt

8. En déduire que les q-Sylows de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ sont abéliens. 0.5 pt

On suppose à présent que q divise $p+1$. On introduit les matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

où $\alpha \in \mathbb{F}_p$ n'est pas un carré de $\mathbb{F}_p$, c'est à dire que $\forall x \in \mathbb{F}_p$, $x^2 \neq \alpha$.

9. Montrer les formules suivantes pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{F}_p$. 1 pt

i. $J^2 = \alpha I$.

ii. $(aI + bJ)(cI + dJ) = (ac + \alpha bd)I + (ad + bc)J$.

iii. $(aI + bJ)(aI - bJ) = (a^2 - \alpha b^2)I$.

10. Déduire de ces formules que l'ensemble : 1 pt

$$K = \{aI + bJ \mid a, b \in \mathbb{F}_p\} \subset \mathrm{M}_2(\mathbb{F}_p)$$

muni de l'addition et la multiplication matricielle est un corps de cardinal p^2.

11. En déduire que les q-Sylows de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ sont cycliques. 1 pt

Exercice 3, environ sur 9 points **9 pts**

Soit p un nombre premier. Pour cet exercice, le symbole $\mathfrak{S}_p$ désigne le groupe des permutations de l'ensemble $\{0, 1, ..., p-1\}$. On identifie l'ensemble $\{0, 1, ..., p-1\}$ avec le corps $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}_{/p\mathbb{Z}}$ à p éléments. On note :

$$\mathrm{GA}_1(p) = \{x \mapsto ax + b \mid a \in \mathbb{F}_p^\times, b \in \mathbb{F}_p\} \leqslant \mathfrak{S}_p$$

On dit qu'un sous-groupe $G \leqslant \mathfrak{S}_p$ est *transitif* lorsque l'action de G sur $\{0, 1, ..., p-1\}$ est transitive.

1. Justifier que $\mathrm{GA}_1(p)$ est bien un sous-groupe de $\mathfrak{S}_p$. 0.5 pt

2. Montrer que $\mathrm{GA}_1(p)$ est un sous-groupe transitif de $\mathfrak{S}_p$. 1 pt

On note t la permutation $t : x \mapsto x + 1 \bmod p$.

3. Montrer que le sous-groupe $\langle t \rangle$ engendré par t est l'unique p-Sylow de $\mathrm{GA}_1(p)$. 0.5 pt

4. Montrer que le groupe $\mathrm{GA}_1(p)$ est résoluble. 0.5 pt

5. Soit G un sous-groupe transitif de $\mathfrak{S}_p$. Soit $H \lhd G$ non-trivial.

a. Montrer que si $x, y \in \mathbb{F}_p$, alors le cardinal de l'orbite de x sous H et celui de l'orbite de y sous H sont égaux. 1 pt

b. En déduire que H est aussi transitif. 0.5 pt

6. Soit G un sous-groupe de $\mathfrak{S}_p$ abélien et transitif.

a. Montrer que pour tout élément g non-trivial de G, le groupe engendré par g est transitif. 0.5 pt

b. En déduire que quitte à conjuguer G, on peut supposer que G contient la permuation $t : x \mapsto x + 1$. 0.5 pt

c. Montrer qu'alors $G = \langle t \rangle$. 1 pt

7. Soit $g \in \mathfrak{S}_p$ tel que $gtg^{-1} = t^k$, pour un certain $k \in \mathbb{F}_p^\times$. Montrer que g est de la forme $x \mapsto kx + i$ pour un certain $i \in \mathbb{F}_p$. 1 pt

8. Montrer que le normalisateur de $\mathrm{GA}_1(p)$ dans $\mathfrak{S}_p$ est $\mathrm{GA}_1(p)$. 1 pt

9. En déduire que tout sous-groupe G de $\mathfrak{S}_p$ résoluble et transitif est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{GA}_1(p)$. 1 pt