9. Homographies

Il nous reste à évoquer les transformations de la géométrie projective, et le groupe des transformations d'un espace projectif. Celles-ci s'appellent les homographies. Pour les définir, on observe qu'un isomorphisme k-linéaire $f : E \to E'$ envoie une droite vectorielle sur une droite vectorielle. (Dans ce cas $\dim E = \dim E'$).

Déf Soient $P = \mathbb{P}(E)$, $P' = \mathbb{P}(E')$ deux espaces projectifs de même dimension. On appelle <u>homographie</u> une application $g : P \to P'$ qui est induite par une application linéaire $f : E \to E'$.

On a donc un diagramme carré commutatif :

$$\begin{tikzcd} E\setminus\{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & E'\setminus\{0\} \arrow[d, "\pi'"] \\ P=\mathbb{P}(E) \arrow[r, "g"] & P'=\mathbb{P}(E') \end{tikzcd}$$

Concrètement, g envoie un point $x \in \mathbb{P}(E)$ sur le point défini par la droite $f(D)$.
(= une droite $D \subset E$)

<u>Remarque</u> Si E, E' sont de dimensions n, n' non nécessairement égales et $f : E \to E'$ est quelconque, $f(D)$ peut ne pas être une droite (lorsque $f(D) = 0$). Dans ce cas elle définit au mieux une application

$$\mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(\ker f) \longrightarrow \mathbb{P}(E')$$ ce qui est déjà utile parfois !

Déf On appelle <u>groupe projectif linéaire</u> de E l'ensemble des homographies de E dans lui-même. On le note $PGL(E)$.

On dispose d'une application, surjective par définition :

$$\begin{aligned} GL(E) &\longrightarrow PGL(E) \\ f &\longmapsto \mathbb{P}(f). \end{aligned}$$

Comme $(f_1 \circ f_2)(D) = f_1(f_2(D))$, on a $\mathbb{P}(f_1 f_2) = \mathbb{P}(f_1) \circ \mathbb{P}(f_2)$, càd que l'application ci-dessus est un morphisme de groupes. Son noyau est composé des applications qui fixent toutes les droites, qui sont les homothéties d'où un isomorphisme

$$GL(E) / \{\text{homothéties}\} \xrightarrow{\sim} PGL(E).$$

Si $E = k^{n+1}$ on note $PGL_{n+1}(k) = PGL(E)$.

Si le corps k est fini de cardinal q et $\dim(E)=n+1$, pour les petites valeurs de (q,n) il peut arriver que l'inclusion

$$PGL(E) \xhookrightarrow{i} \mathfrak{S}_{\mathbb{P}(E)} \quad \text{soit une bijection.}$$

$\text{Card} = \dfrac{(q^{n+1}-1)(q^{n+1}-q)\cdots(q^{n+1}-q^n)}{q-1}$ $\qquad$ $\text{Card} = \left(\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)!$

C'est le cas pour $q=2$ et $n=1$: $PGL(\mathbb{F}_2^2) \simeq \mathfrak{S}_3$

$q=3$ et $n=1$: $PGL(\mathbb{F}_3^2) \simeq \mathfrak{S}_4$

Pour des valeurs de (q,n) un tout petit peu plus grandes l'injection i n'est plus bijective mais permet tout de même de déterminer PGL ; voir exercices en TD et Perrin, Chap IV, Prop 5.3.

Si $\dim \mathbb{P}(E)=1$ i.e. pour les droites projectives, PGL se décrit facilement.

Après choix d'une base, on peut identifier E à k^2 et $\mathbb{P}(E)$ à $\mathbb{P}^1(k) = k \cup \{\infty\}$.

Toute homographie est induite (définie) par une application linéaire que l'on peut représenter par une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1(k) & \longrightarrow & \mathbb{P}^1(k) \\ (u:v) & \longmapsto & (au+bv : cu+dv) \\ \| & & \| \\ \left(\frac{u}{v}:1\right) & & \left(\frac{au+bv}{cu+dv}:1\right) \end{array}$$

$\big((u:v)$ = coordonnées homogènes d'un vecteur $(u,v)\big)$

ou encore : $\quad x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ en posant $x = \dfrac{u}{v}$,

cette dernière écriture étant comprise avec les règles habituelles pour l'infini c'est-à-dire que

$$\infty \longmapsto \frac{a}{c}$$
$$-\frac{d}{c} \longmapsto \infty .$$

Th Le groupe des homographies de la droite projective $PGL_2(k) = \dfrac{GL_2(k)}{\text{homothéties}}$ agit simplement 3-transitivement sur la droite projective.

Dém rappelons que ceci signifie que l'action de $G = PGL_2(k)$

sur les triplets de points <u>distincts</u> par $g\cdot(r,s,t)=(gr,gs,gt)$ est libre et transitive. Il suffit pour cela de vérifier que :

1) tout triplet (r,s,t) est dans l'orbite de $(0,1,\infty)$: or l'homographie
$$g(x)=\frac{t(s-r)x+r(t-s)}{(s-r)x+(t-s)}$$
envoie $0\mapsto r$, $1\mapsto s$, $\infty\mapsto t$.

2) le stabilisateur de $(0,1,\infty)$ est réduit à $\{id\}$: or il est immédiat de vérifier que la seule homographie $g(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ qui fixe $0,1$ et ∞ est $g(x)=x$ ⊠

La simple 3-transitivité peut aussi s'exprimer par la <u>bijection</u> :

$$\begin{array}{rcl} PGL_2(k) & \xrightarrow{1\text{-}1} & \mathbb{P}^1(k)^3\setminus\Delta = \{\text{triplets de points distincts}\} \\ g & \mapsto & g\cdot(0,1,\infty) \end{array}$$

diagonale "grasse" ou "épaisse"