7. Hyperplans à l'infini, espaces affines à distance finie

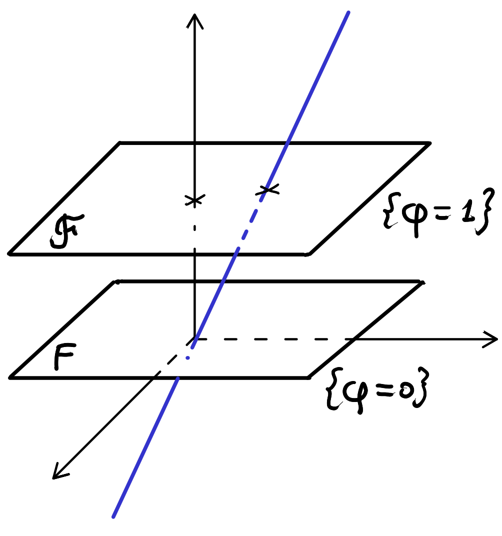
Nous allons voir maintenant que le choix d'un hyperplan vectoriel $F \subset E$ (de manière équivalente : un hyperplan projectif $H = \mathbb{P}(F) \subset \mathbb{P}(E)$) permet de voir $\mathbb{P}(E)$ comme réunion d'un espace affine « à distance finie » et d'un « hyperplan à l'infini ».

Prop Soit $P = \mathbb{P}(E)$ un espace projectif de dimension n.
Soit $H = \mathbb{P}(F)$ un hyperplan (projectif). Alors l'ensemble $P \setminus H = \mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(F)$ possède une structure naturelle d'espace affine de direction F (et donc de dimension n).

Dém Soit $\varphi \in E^*$ une forme linéaire nulle sur F (une « équation » de F) et $\mathcal{F} = \{x \in E,\ \varphi(x) = 1\}$. Il s'agit d'un hyperplan affine de E, de direction l'hyperplan F. [Par exemple, si on complète une base $\{e_0, \dots, e_{n-1}\}$ de F avec un vecteur e_n en une base de E, on peut prendre $\varphi = e_n^*$ et alors $\mathcal{F} = \{ x = \sum_{i=0}^{n} x_i e_i ;\ x_n = 1 \}$.]

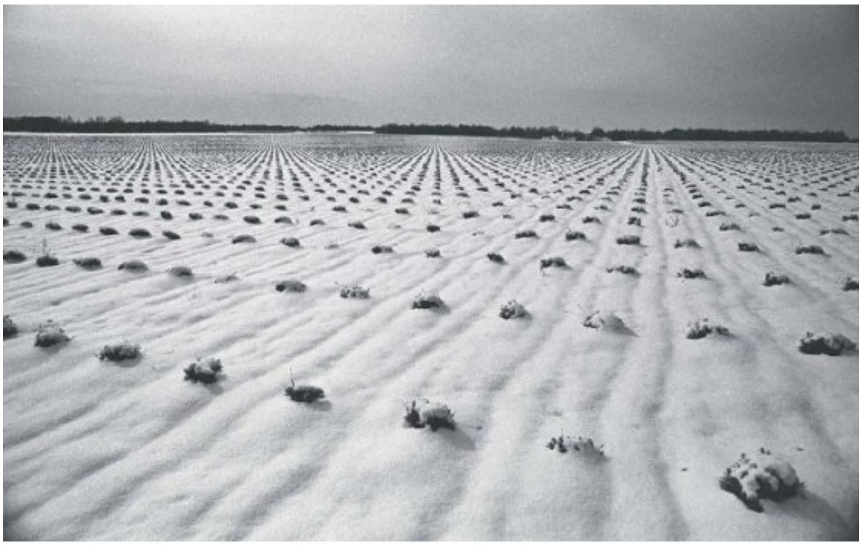
Les points de $P \setminus H$ correspondent aux droites de E non incluses dans F.
Une telle droite D intersecte $\mathcal{F}$ en un unique point M_D, et l'application

$$\alpha : P \setminus H \longrightarrow \mathcal{F}$$
$$x = \pi(D) \longmapsto \alpha(x) = M_D$$



est une bijection entre $P \setminus H$ et l'espace affine $\mathcal{F}$, cqfd ☒

Dans cette situation on dit que H est un <u>hyperplan à l'infini</u>. Ce n'est qu'une manière de porter un point de vue sur $\mathbb{P}(E)$, qui permet de se le représenter en dessinant l'espace affine $\mathcal{E} = P \setminus H$ et en tenant compte du fait qu'à l'infini, non représenté sur le dessin, se trouve un hyperplan projectif. On notera que le résultat sur l'intersection de deux sous-espaces projectifs de dimensions complémentaires (première proposition de ce § 6) a pour conséquence que dans le dessin d'un plan affine « à distance finie » d'un plan projectif P, deux droites parallèles se coupent à l'infini. En témoigne la belle photographie ci-dessous d'un champ de lavande prise par François Rouvière en hiver 1981 sur le plateau de Valensole, extraite du livre de M. Audin.



On y voit à l'oeil nu se matérialiser un infini qui, sur le plateau de Valensole, n'existe pas.

Nous allons maintenant faire des exemples en dim 1 et 2.

La droite projective

Soit $P = \mathbb{P}(E)$, $\dim E = 2$, une droite projective. Un hyperplan $F \subset E$ est une droite ; la seule droite incluse dans F est F lui-même donc $\mathbb{P}(F) = \{\text{un point}\}$. On note ce point ∞ et on a $P = \underbrace{k}_{\text{droite affine}} \amalg \underbrace{\{\infty\}}_{\text{point à l'infini}}$

Si $E = k^2 = ke_0 \oplus ke_1$ et $F = \{x_1 = 0\}$ la bijection s'écrit ainsi :

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & k \amalg \{\infty\} \\ \left(\begin{array}{l}\text{droite } D \text{ dirigée} \\ \text{par le vecteur } (a,b)\end{array}\right) & \longmapsto & \frac{a}{b} \end{array}$$

si $D \not\subset F$: $(a,b) \sim (a/b, 1) \longmapsto \frac{a}{b}$

si $D \subset F$: $(a,b) = (a,0) \longmapsto \infty = « \frac{a}{0} »$

Le plan projectif

Soit $P = \mathbb{P}(E)$, $\dim E = 3$ un plan projectif. Soit $E \supset F \supset G$ drapeau complet.

On a alors $\mathbb{P}(E) = \{\text{plan affine}\} \amalg \mathbb{P}(F)$ ← droite à l'infini

point à l'infini de $\mathbb{P}(F)$

$$= \{\text{plan affine}\} \amalg \{\text{droite affine}\} \amalg \mathbb{P}(G)$$

$$= \{\text{plan affine}\} \amalg \{\text{droite affine}\} \amalg \{\text{point affine}\}.$$

En général

On voit que lorsque $\dim E = n+1$, le choix d'un drapeau

$$E = E_{n+1} \supset E_n \supset \dots \supset E_1 \supset E_0 = \{0\}$$

permet de décomposer $\mathbb{P}(E)$ en union disjointe d'espaces affines :

$$(\star) \qquad \mathbb{P}(E) = \underbrace{\left\{\begin{array}{l}\text{espace affine} \\ \text{des droites de } E \\ \text{non incluses dans } E_n\end{array}\right\}}_{\text{dimension } n} \amalg \underbrace{\left\{\begin{array}{l}\text{espace affine} \\ \text{des droites de } E_n \\ \text{non incluses dans } E_{n-1}\end{array}\right\}}_{\text{dimension } n-1} \amalg \dots \amalg \underbrace{\mathbb{P}(E_1)}_{\text{dimension } 0}$$

Prenons $E = k^{n+1}$. Un élément de $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}^n(k)$ (=droite de k^{n+1}) est représenté par un uplet $(x_0, \dots, x_n) \neq 0$ (un vecteur directeur) bien défini à multiplication scalaire simultanée près. On note $(x_0 : \dots : x_n)$, et on appelle <u>coordonnées homogènes</u>, une telle classe d'équivalence de uplets : $(x_0 : \dots : x_n) = (y_0 : \dots : y_n) \Leftrightarrow \exists \lambda \in k^\times,\ y_i = \lambda x_i$.
(pour tout i)

En ces termes la décomposition précédente s'écrit

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}^n(k) & \longrightarrow & k^n \amalg \mathbb{P}^{n-1}(k) \\ (x_0 : \dots : x_n) & \longmapsto & \begin{cases} \left(\frac{x_0}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right) \in k^n & \text{si } x_n \neq 0 \\ (x_0 : \dots : x_{n-1}) \in \mathbb{P}^{n-1}(k) & \text{si } x_n = 0. \end{cases} \end{array}$$

<u>Rem</u> si k est fini, notons $q = |k|$ et $n+1 = \dim(E)$. Un k-espace affine de dimension i est en bijection avec k^i, donc de cardinal q^i.
La décomposition (✻) fournit $\displaystyle |\mathbb{P}(E)| = \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ ce qui donne une nouvelle démo. de la formule déjà vue.

<u>Complétion projective</u>

On a vu que le complémentaire d'un hyperplan projectif dans un espace projectif est muni d'une structure d'espace affine. Réciproquement tout espace affine $\mathcal{F}$ peut être plongé dans un espace projectif appelé sa « complétion projective » comme complémentaire d'un hyperplan à l'infini. On peut faire cela de manière parfaitement intrinsèque (⋆) mais par souci de simplicité fixons un point $A \in \mathcal{F}$, considérons le vectorialisé $\mathcal{F}_A$ et l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}_A \times k$. On peut identifier $\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}_A \times \{1\} \subset E$ et donc à l'espace affine $\mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(H)$ avec $H = \mathcal{F}_A \times \{0\} \subset E$.

(⋆) Voir Lelong-Ferrand, Chap. IV, §4.