

## 4. Trois théorèmes de géométrie plane, et le simplexe régulier

M. Audin,  
Géométrie,  
EDP Sciences

Nous terminons cette petite introduction à la géométrie affine avec les théorèmes de Thalès<sup>(★)</sup>, Pappus<sup>(★★)</sup> et Desargues<sup>(★★★)</sup> dans le plan affine.

La géométrie affine sur un corps quelconque ne fournit pas de moyen de mesurer des longueurs, mais elle permet de définir les rapports de longueurs et c'est l'objet de Thalès.

Déf Soient  $\mathcal{D}$  une droite affine de direction  $\mathcal{D}$  (donc  $\dim \mathcal{D}=1$ ) et  $u$  un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$  (ou de  $\mathcal{D}$ , on dit comme on veut). Si  $A, B \in \mathcal{D}$  on appelle mesure algébrique notée  $\overline{AB}$  le scalaire  $\lambda \in k$  tel que  $\overrightarrow{AB} = \lambda u$ .

Rem  $\star\star$  la mesure alg. dépend du choix de  $u$ : si on change  $u$  en  $\alpha u$  ( $\alpha \in k^*$ ), elle est changée en  $\alpha^{-1}u$ . Ce calcul montre qu'en revanche, si  $A, B, C \in \mathcal{D}$  avec  $A \neq C$  alors le rapport  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$  ne dépend pas du choix de  $u$ .

### Le théorème de Thalès

**Théorème I.4.2.** Soient  $d, d'$  et  $d''$  trois droites parallèles distinctes,  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  deux droites dont aucune n'est parallèle à  $d$ . Soient, pour  $i = 1, 2$ ,  $A_i = \mathcal{D}_i \cap d$ ,  $A'_i = \mathcal{D}_i \cap d'$ ,  $A''_i = \mathcal{D}_i \cap d''$ . Alors on a

$$\frac{\overline{A_1 A''_1}}{\overline{A_1 A'_1}} = \frac{\overline{A_2 A''_2}}{\overline{A_2 A'_2}}.$$

Réciproquement, si un point  $B$  de  $\mathcal{D}_1$  vérifie l'égalité

$$\frac{\overline{A_1 B}}{\overline{A_1 A'_1}} = \frac{\overline{A_2 A''_2}}{\overline{A_2 A'_2}},$$

alors il est sur  $d''$  (et  $B = A''_1$ ).

(★) Thalès de Milet, 620 av. J.-C. - 545 av. J.-C.

(★★) Pappus d'Alexandrie, 4ème siècle ap. J.-C. (on n'en sait pas plus)

(★★★) Girard Desargues, 1591-1661

*Démonstration.* Soit  $\pi$  la projection sur  $\mathcal{D}_2$  parallèlement à  $d$  et soit  $p$  la projection linéaire associée. Alors  $\pi$  envoie  $A_1$  sur  $A_2$  etc. De plus, si  $\overrightarrow{A_1A_1''} = \lambda \overrightarrow{A_1A_1'}$ , on a  $p(\overrightarrow{A_1A_1''}) = \lambda p(\overrightarrow{A_1A_1'})$  car  $p$  est linéaire. C'est dire que  $\overrightarrow{A_2A_2''} = \lambda \overrightarrow{A_2A_2'}$ , égalité dont on déduit le sens direct du théorème.

La réciproque en est conséquence. On a

$$\overrightarrow{A_1A_1''} = \frac{\overrightarrow{A_2A_2''}}{\overrightarrow{A_2A_2'}} \overrightarrow{A_1A_1'}$$

de sorte que  $\overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{A_1A_1''}$  et donc que  $B = A_1''$ . □

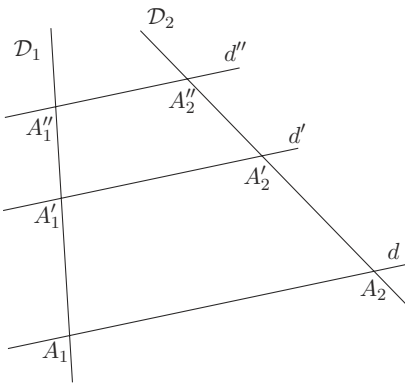


FIGURE 10. Le théorème de Thalès...

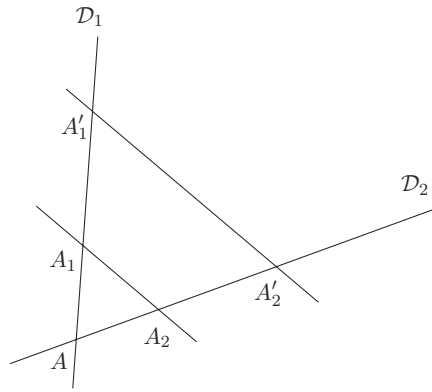


FIGURE 11. ... et un de ses corollaires

**Corollaire I.4.3.** Soient  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  deux droites sécantes en  $A$ ,  $d$  et  $d'$  deux droites parallèles coupant  $\mathcal{D}_i$  en  $A_i, A_i'$  distincts de  $A$ . Alors

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{AA_1'}} = \frac{\overline{AA_2}}{\overline{AA_2'}} = \frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1'A_2'}}$$

*Démonstration.* On fait passer par  $A$  une droite parallèle à  $d$  et  $d'$ . On peut appliquer le théorème de Thalès. On obtient ainsi

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{AA_1'}} = \frac{\overline{AA_2}}{\overline{AA_2'}}$$

la première égalité recherchée. On voit aussi ainsi que l'homothétie de centre  $A$  qui envoie  $A_1$  sur  $A_1'$  envoie  $A_2$  sur  $A_2'$ . On en déduit la deuxième égalité. □

**Remarque I.4.4.** Le théorème de Thalès exprime simplement le fait que les projections sont des applications affines (exercice I.17). On utilise maintenant, pour

le théorème de Pappus, les homothéties et les translations, et précisément le fait que deux translations, ou deux homothéties de même centre, commutent.

### Le théorème de Pappus

**Théorème I.4.5.** Soient  $A, B, C$  trois points d'une droite  $\mathcal{D}$  et  $A', B', C'$  trois points d'une droite  $\mathcal{D}'$  distincte de  $\mathcal{D}$ . Si  $AB'$  est parallèle à  $BA'$  et  $BC'$  est parallèle à  $CB'$ , alors  $AC'$  est parallèle à  $CA'$ .

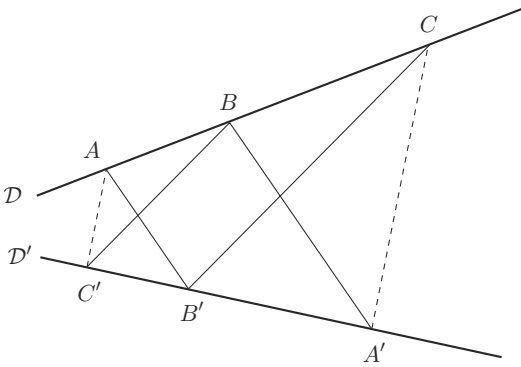


FIGURE 12. Le théorème de Pappus

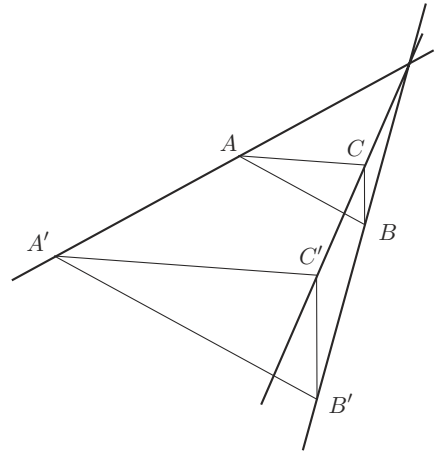


FIGURE 13. Le théorème de Desargues

*Démonstration.* Supposons d'abord que  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  ne soient pas parallèles. Soit  $O$  leur point d'intersection. Soient  $\varphi$  l'homothétie de centre  $O$  qui envoie  $A$  sur  $B$  et  $\psi$  celle qui envoie  $B$  sur  $C$ . Alors, grâce au théorème de Thalès (ou simplement parce qu'une homothétie vectorielle transforme tout vecteur en un vecteur colinéaire),  $\varphi$  envoie  $B'$  sur  $A'$  et  $\psi$  envoie  $C'$  sur  $B'$ . Ainsi  $\psi \circ \varphi$  envoie  $A$  sur  $C$  et  $\varphi \circ \psi$  envoie  $C'$  sur  $A'$ . Comme  $\varphi$  et  $\psi$  sont des homothéties de même centre, elles commutent. Il y a donc une homothétie de centre  $O$  qui envoie  $A$  sur  $C$  et  $C'$  sur  $A'$ , mais alors  $AC'$  et  $CA'$  sont parallèles comme l'affirme la réciproque du théorème de Thalès.

Si  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont parallèles, on peut remplacer les homothéties par des translations dans le raisonnement. □

### Le théorème de Desargues

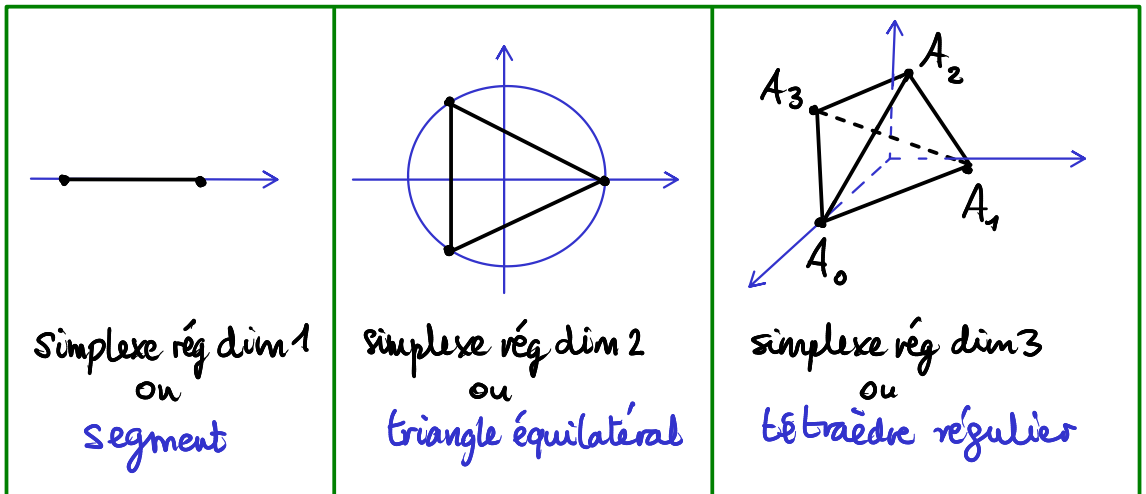
Encore des homothéties et des translations pour le théorème de Desargues.

**Théorème I.4.6.** Soient  $ABC$  et  $A'B'C'$  deux triangles sans sommet commun et à côtés respectivement parallèles. Alors les droites  $AA'$ ,  $BB'$  et  $CC'$  sont concourantes ou parallèles.

*Démonstration.* Si  $AA'$  et  $BB'$  se coupent en  $O$ , l'homothétie  $\varphi$  de centre  $O$  qui envoie  $A$  sur  $A'$  envoie aussi  $B$  sur  $B'$  (encore Thalès). Soit  $\lambda$  son rapport et soit  $C'' = \varphi(C)$ . Ainsi  $\overrightarrow{OC''} = \lambda\overrightarrow{OC}$ . Mais  $\overrightarrow{OA'} = \lambda\overrightarrow{OA}$  et donc  $A'C''$  et  $AC$  sont parallèles. Alors  $C''$  est sur la parallèle à  $AC$  passant par  $A'$ , c'est-à-dire  $A'C'$ , mais il est aussi sur la parallèle à  $BC$  passant par  $B'$ , c'est-à-dire  $B'C'$ . Donc  $C'' = C'$ . Mais bien sûr,  $O$ ,  $C$  et  $C''$  sont alignés, ce qui fait que  $CC'$  passe par  $O$ .

Si  $AA'$  et  $BB'$  sont parallèles, on raisonne de façon analogue avec des translations. □

Nous terminerons par une application de la géométrie affine à la géométrie euclidienne : la construction du simplexe régulier de dimension  $n$ .



Cet objet vit dans un espace du type suivant :

Def un espace affine euclidien est un espace affine  $\mathcal{E}$  dont la direction  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel euclidien i.e. est munie d'un produit scalaire.

## Remarques

1) dans un E.A.E on peut définir une distance par

$$AB = d(A, B) \stackrel{\text{def}}{=} \|\vec{AB}\| \quad (\forall A, B \in \mathcal{E})$$

↪ la norme euclidienne de E

2) on dispose alors de la notion d'isométrie i.e.  $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$   
telle que  $d(f(A), f(B)) = d(A, B) \quad (\forall A, B)$

3) le groupe affine euclidien  $GA_E(\mathcal{E})$  est l'ensemble  
des isométries affines bijectives de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}$  (on peut  
montrer qu'en fait toute isométrie affine  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  est bij.).

On a donc  $GA_E(\mathcal{E}) \subset GA(\mathcal{E})$  et on montre que

pour  $f \in GA(\mathcal{E})$  de partie linéaire  $\varphi$ , on a

$$\boxed{f \in GA_E(\mathcal{E}) \Leftrightarrow \varphi \in O(E)}$$

↑  
/   
= groupe orthogonal  
= groupe des isométries de E.

Au vu de la structure de  $GA(\mathcal{E})$  on a donc  $GA_E(\mathcal{E}) \simeq T(\mathcal{E}) \times O(E)$ .

Th Dans l'espace affine euclidien standard  $\mathbb{R}^n$ , il existe  
un polyèdre  $\Sigma_n$  non dégénéré (i.e. non inclus dans un  
sous-espace affine de dimension  $< n$ ) et dont toutes les  
arêtes sont de longueur 1. Il est unique à isométrie  
près ; on l'appelle le  $n$ -simplexe régulier. Toutes ses  
faces de dim  $i$  sont des  $i$ -simplexes réguliers, et le groupe

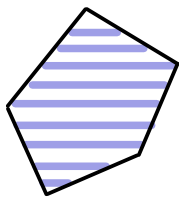
$$Iso(\Sigma_n) = \{f \in GA_E(\mathbb{R}^n), f(\Sigma_n) = \Sigma_n\}$$

de ses isométries est isomorphe au groupe symétrique  $S_{n+1}$ .

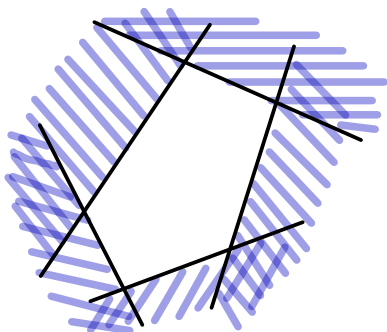
Rem la notion de polyèdre n'est pas si aisée à définir...

Si on se limite aux polyèdres convexes (c'est le cas de  $\Sigma_n$ )  
on peut les définir comme

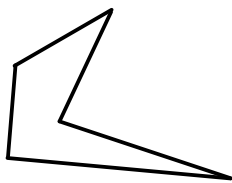
enveloppes convexes d'un nombre fini de points  
ou intersections d'un nombre fini de demi-espaces  
en notant que l'équivalence entre ces 2 points de vue n'est  
pas évidente ! Nous n'en dirons pas plus ici.



enveloppe  
convexe  
de 5 points



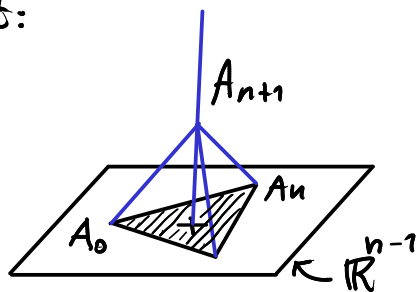
intersection de 5 demi-plans



polyèdre  
non convexe

Dém du th une manière de construire  $\Sigma_n$  est de procéder  
par récurrence, supposant  $\Sigma_{n-1}$  construit:

on trace la droite orthogonale  
à l'hyperplan contenant  $\Sigma_{n-1}$   
passant par son centre de gravité  
{ isobarycentre

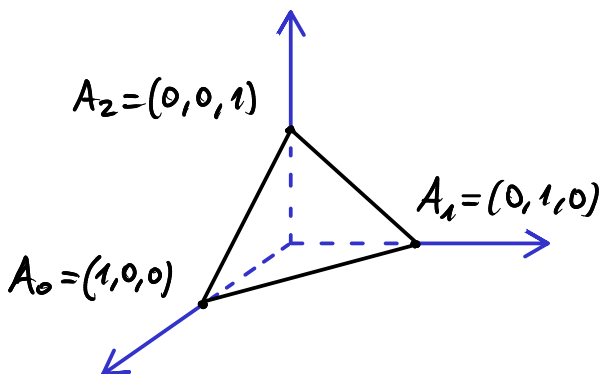


et on cherche sur cette droite un point à distance 1.

Dans ce cours nous n'avons pas parlé de barycentres, et  
nous utiliserons une autre méthode.

L'idée est que déjà pour  $\Sigma_2$  (le triangle), si on le met  
dans l'hyperplan affine  $H \subset \mathbb{R}^3$  d'équation  $x+y+z=1$ ,

les coordonnées de ses sommets sont beaucoup plus simples !



On travaille donc dans  $\mathcal{E} = E = \mathbb{R}^{n+1}$ . Notons

$$\bullet A_i = (0, \dots, 1, 0, \dots) = 0 + e_i \quad \begin{array}{l} (e_i = i^{\text{ème}} \text{ vect. de la base} \\ \text{canonique de } \mathbb{R}^{n+1}) \\ 0 \leq i \leq n \end{array}$$

↑  
 $i^{\text{ème}}$  position

$$\bullet \mathcal{H} = \left\{ M = 0 + \sum_{i=0}^n \lambda_i e_i ; \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

= hyperplan affine de  $\mathcal{E}$  d'équation  $x_0 + \dots + x_n = 1$

= hyperplan affine passant par  $A_0$  de direction  $\mathcal{H} = \{ \sum x_i = 0 \}$

Enfin on note  $\Sigma_n$  le polyèdre de sommets  $A_0, \dots, A_n$  qui est inclus dans  $\mathcal{H}$ . On a les inclusions :

$$(1) S_{n+1} \hookrightarrow \text{Iso}_{\mathcal{H}}(\Sigma_n) \text{ comme sous-groupes de } \text{GAE}(\mathcal{E})$$

(isométries affine de  $\mathcal{E} = \mathbb{R}^{n+1}$  ambiant)

car le sous-groupe des matrices de permutation de  $GL(E)$  permute les  $A_i$  et est inclus dans  $O(E)$ . Il s'identifie à des transf. affines qui fixent 0 et stabilisent  $\mathcal{H}$  et  $\Sigma_n$ .

$$(2) \text{Iso}_{\mathcal{H}}(\Sigma_n) \hookrightarrow S_{n+1}, f \mapsto f|_{\{A_0, \dots, A_{n+1}\}}$$

car une transf affine  $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  qui fixe  $A_0, \dots, A_{n+1}$  est une appl. linéaire du vectorialisé  $\mathcal{H}_{A_0}$  qui fixe les  $n$  vecteurs

de la base  $\{\vec{A_0A_1}, \dots, \vec{A_0A_n}\}$  donc  $f = \text{id}$ .

Les deux inclusions  $S_{n+1} \subset \underset{2e}{\text{Iso}}(\Sigma_n) \subset S_{n+1}$  sont nécessairement des égalités, comme désiré.

Nous laissons en exercice l'unicité à isométrie près  $\square$