3.8. Décomposition de Bruhat et décomposition LU

Notons M_σ la matrice de coefficients $m_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$ associée à une permutation σ. La décomposition de Bruhat est un résultat dont on expliquera la signification géométrique ci-dessous, et qui peut s'énoncer sous forme matricielle de la manière suivante :

Théorème (décomposition de Bruhat). *Soit k un corps. Pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(k)$, il existe une unique permutation σ, une matrice U unipotente supérieure et une matrice T triangulaire supérieure, telles que $A = UM_\sigma T$.*

Rappelons que l'unipotence de U signifie que ses coefficients diagonaux sont égaux à 1. Nous allons établir ceci comme conséquence d'un énoncé plus géométrique d'algèbre linéaire. On notera $F = (F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_n)$ les drapeaux complets, avec $\dim(F_i) = i$.

Théorème. *Soit E un k-espace vectoriel de dimension n. Soient F et G deux drapeaux complets de E. Alors il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et une base $(e_1, \dots, e_n)$ telles que $e_i \in F_i \cap G_{\sigma(i)}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. De plus, la permutation $\sigma_{F,G} := \sigma$ est unique.*

En clair : il existe une base de E dont chaque vecteur appartient à l'un des F_i et à l'un des G_j.

Démonstration. *Construction de σ.* Fixons un entier $i \geqslant 1$. On observe que si $F_{i-1} + G_{j_0} = F_i + G_{j_0}$ pour un certain entier $j_0 \geqslant 1$, alors l'égalité vaut pour tout $j \geqslant j_0$ puisque $F_{i-1} + G_j = F_{i-1} + G_{j_0} + G_j = F_i + G_{j_0} + G_j = F_i + G_j$. Autrement dit, lorsque j croît de 0 à n l'inclusion $F_{i-1} + G_j \subset F_i + G_j$ qui est stricte pour $j = 0$ devient une égalité pour un certain $j \geqslant 1$, puis le reste. Notons $\sigma_{F,G}(i) = j$ cet entier minimal, caractérisé par les relations :

$$F_{i-1} + G_{j-1} \subsetneq F_i + G_{j-1} \tag{1}$$

$$F_{i-1} + G_j = F_i + G_j. \tag{2}$$

Vérification du fait que σ est une permutation. Il suffit de montrer que $\sigma_{G,F} \circ \sigma_{F,G} = \mathrm{id}$. Pour cela, notons $j = \sigma_{F,G}(i)$ et montrons qu'alors $i = \sigma_{G,F}(j)$, c'est-à-dire $F_{i-1} + G_{j-1} \subsetneq F_{i-1} + G_j$ et $F_i + G_{j-1} = F_i + G_j$. Démontrons d'abord l'inclusion stricte :

$$F_{i-1} + G_{j-1} \overset{\overset{\text{par (1)}}{\downarrow}}{\subsetneq} F_i + G_{j-1} \subset F_i + G_j \overset{\overset{\text{par (2)}}{\downarrow}}{=} F_{i-1} + G_j. \tag{3}$$

Il s'ensuit par argument de dimension que l'inclusion $F_i + G_{j-1} \subset F_i + G_j$ est une égalité :

$$\dim(F_i + G_{j-1}) \overset{\overset{\text{par (1)}}{\downarrow}}{=} \dim(F_{i-1} + G_{j-1}) + 1 \overset{\overset{\text{par (3)}}{\downarrow}}{=} \dim(F_{i-1} + G_j) \overset{\overset{\text{par (2)}}{\downarrow}}{=} \dim(F_i + G_j).$$

Construction de la base (e_i). Pour i et j quelconques, utilisant la formule reliant la somme de deux sous-espaces à leur intersection (lemme rappelé ci-dessous), on voit que $F_{i-1}+G_j = F_i+G_j$ équivaut à $\dim(F_i \cap G_j) = \dim(F_{i-1} \cap G_j) + 1$. Si $j = \sigma(i)$ avec $\sigma = \sigma_{F,G}$, cette égalité a lieu donc on peut choisir $e_i \in F_i \cap G_{\sigma(i)} \setminus F_{i-1} \cap G_{\sigma(i)}$. En particulier, on a $e_i \in F_i \setminus F_{i-1}$ ce qui montre que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E.

Unicité de $\sigma_{F,G}$. Supposons qu'il existe une permutation $\varphi \in \mathfrak{S}_n$ et des vecteurs $e_i \in F_i \cap G_{\varphi(i)}$ formant une base de E. Alors $F_i = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$ donc $e_i \notin F_{i-1}$. Posant $j = \varphi(i)$, on a donc $\dim(F_i \cap G_j) = \dim(F_{i-1} \cap G_j) + 1$ puis $F_{i-1} + G_j = F_i + G_j$ d'après l'argument sur la somme et l'intersection utilisé quelques lignes plus haut. D'après la propriété de minimalité qui définit $\sigma_{F,G}(i)$, on a donc $\varphi(i) \geqslant \sigma_{F,G}(i)$. La permutation $\tau := \varphi \circ \sigma_{F,G}^{-1}$ vérifie donc $\tau(k) \geqslant k$ pour tout k, donc $\tau = \mathrm{id}$ puis $\varphi = \sigma_{F,G}$. □

Lemme. *Si F, G sont deux sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie, on a*

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Démonstration. L'application linéaire $F \times G \to F + G$, $(x, y) \mapsto x - y$ est surjective de noyau $K := \{(x, x);\ x \in F \cap G\} \simeq F \cap G$. Le résultat en découle en prenant les dimensions. □

Corollaire. *Soit X l'ensemble des paires de drapeaux de E, muni de l'action naturelle de $G = \mathrm{GL}(E)$ définie par $u.(F, G) = (u(F), u(G))$. Alors l'application $(F, G) \mapsto \sigma_{F,G}$ passe au quotient en une bijection entre l'ensemble d'orbites X/G et le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.*

Démonstration. La surjection est évidente car si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, pour n'importe quel choix de drapeau F avec une base (e_i) telle que $F_i = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$, le drapeau G défini par $f_i = e_{\sigma^{-1}(i)}$ et $G_i = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_i)$ vérifie $\sigma_{F,G} = \sigma$.

Pour démontrer l'injection on observe que dans les conditions du théorème, si $\sigma = \sigma_{F,G}$ et (e_i) sont comme décrites, on a $G_j = \mathrm{Vect}(e_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, e_{\sigma^{-1}(j)})$. En effet, pour chaque $k \leqslant j$ le vecteur $e_{\sigma^{-1}(k)}$ appartient à G_k qui est inclus dans G_j, et ces vecteurs sont en nombre $j = \dim(G_j)$. Armés de cette remarque considérons deux paires (F, G) et (F', G') dont les permutations associées sont égales i.e. $\sigma = \sigma'$. Soient $(e_i), (e'_i)$ des bases telles que $e_i \in F_i \cap G_{\sigma(i)}$ et $e'_i \in F'_i \cap G'_{\sigma(i)}$. Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$ l'application telle que $u(e_i) = e'_i$ pour tout i. Alors :

$$\begin{aligned} u(F_i) &= \mathrm{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_i)) = F'_i, \\ u(G_j) &= \mathrm{Vect}(u(e_{\sigma^{-1}(1)}), \dots, u(e_{\sigma^{-1}(j)}) = \mathrm{Vect}(e'_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, e'_{\sigma^{-1}(j)}) = G'_j, \end{aligned}$$

donc $u(F) = F'$ et $u(G) = G'$. Ainsi (F, G) et (F', G') ont même classe dans X/G. □

Démonstration de la décomposition de Bruhat. Notons $f = (f_1, \dots, f_n)$ la base canonique de $E = k^n$ et $g = (g_1, \dots, g_n)$ la base formée par les vecteurs colonnes de la matrice A. Ainsi A n'est autre que la matrice de l'identité exprimée dans les bases g à la source et f au but, c'est-à-dire, en symboles $A = \mathrm{Mat}_{g,f}(\mathrm{id})$.

Soient F, G les deux drapeaux de E définis par $F_i = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_i)$ et $G_j = \mathrm{Vect}(g_1, \dots, g_j)$. Notons $\sigma = \sigma_{F,G}$ et $e = (e_1, \dots, e_n)$ la base fournie par le théorème, qui vérifie $e_i \in F_i \cap G_{\sigma(i)}$. Puisque $e_i \in F_i \setminus F_{i-1}$, lorsqu'on exprime e_i sur la base f sa composante sur f_i est non nulle ; quitte à normaliser e_i on peut donc supposer que cette composante est 1. Ceci signifie que la matrice de passage $U = \mathrm{Mat}_{e,f}(\mathrm{id})$ est unipotente supérieure.

Notons maintenant $\tau = \sigma^{-1}$ et $e'_i = e_{\tau(i)}$; clairement la matrice de passage $\mathrm{Mat}_{e',e}(\mathrm{id})$ est la matrice de permutation M_σ. Les vecteurs e'_i vérifient $e'_i \in F_{\tau(i)} \cap G_i$ et le raisonnement fait précédemment montre que la matrice de passage $T = \mathrm{Mat}_{g,e'}(\mathrm{id})$ est triangulaire supérieure (mais on ne peut plus normaliser de manière à ce qu'elle soit unipotente, car cela changerait la normalisation de e_i). On conclut en disant que la matrice de l'application composée

$$\begin{tikzcd}
(E,g) \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[rrr, bend left, dashed, "A"] \arrow[r, bend right, dotted, "T"'] & (E,e') \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[r, bend right, dotted, "M_\sigma"'] & (E,e) \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[r, bend right, dotted, "U"'] & (E,f)
\end{tikzcd} ,$$

écrite dans les bases indiquées, est le produit de matrices $A = UM_\sigma T$. $\square$

Notons $G = \mathrm{GL}_n(k)$ et B le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures ; c'est le stabilisateur du drapeau complet standard de $E = k^n$. Notons $B_u \subset B$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures unipotentes. La décomposition de Bruhat fournit une partition

$$G = \coprod_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} B_u \cdot M_\sigma \cdot B$$

qui n'est autre que la partition en orbites (on parle de « classes doubles ») pour l'action du groupe $B_u \times B$ sur G par $(P,Q)\cdot M := PMQ^{-1}$. Cette partition diffère de la partition en classes à gauche ou à droite utilisée pour démontrer le théorème de Lagrange en ce que l'action qui la définit n'est pas libre, et les stabilisateurs ont des « tailles » variables :

Lemme. *Le stabilisateur $(B_u \times B)_M$ d'une matrice M est isomorphe au sous-groupe $B_u \cap MBM^{-1}$ de $\mathrm{GL}_n(k)$.*

Démonstration. Un élément du stabilisateur est une paire (P,Q) telle que $PMQ^{-1} = M$. Une telle paire est déterminée par $P = MQM^{-1}$ qui appartient à $B_u \cap MBM^{-1}$. $\square$

Les orbites ont donc elles aussi des tailles variables. Il se trouve (nous l'admettons) que l'une d'elles est un ouvert dense, et que c'est la plus grosse de toutes. C'est celle qui correspond à la permutation involutive

$$\sigma_0(i) = n + 1 - i$$

qui réfléchit $\{1, \dots, n\}$ en son milieu. La conjugaison par la matrice de permutation $M_0 := M_{\sigma_0}$ échange matrices triangulaires supérieures et inférieures : pour $n = 3$ on a $M_{\sigma_0} = \left(\begin{smallmatrix} 0&0&1\\ 0&1&0\\ 1&0&0 \end{smallmatrix}\right)$ et

$$M_0 \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} M_0 = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ e & d & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$

Ceci mène à la célèbre décomposition LU. Pour l'énoncer, on rappelle que les mineurs principaux d'une matrice $A = (a_{i,j})$ sont les n déterminants

$$\Delta_k = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,k} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Théorème (décomposition LU**).** *Soit $\sigma_0(i) = n+1-i$ et M_0 la matrice de permutation correspondante. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(k)$ une matrice. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *M_0A appartient à l'orbite B_uM_0B dans la décomposition de Bruhat ;*

(2) *il existe une matrice L triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale, et une matrice U triangulaire supérieure, telles que $A = LU$; de plus cette décomposition est unique ;*

(3) *tous les mineurs principaux de A sont non nuls.*

Démonstration. (1) ⇒ (2). Si $M_0A = UM_0T$ alors $A = M_0UM_0T$. En renommant M_0UM_0 en L et T en U, on obtient une décomposition $A = LU$ comme souhaitée. L'unicité provient du fait que si $A = L_1U_1 = L_2U_2$ alors $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$ est simultanément triangulaire inférieure unipotente et triangulaire supérieure, donc identique.
(2) ⇒ (1). Si $A = LU$ alors $M_0A = (M_0LM_0)M_0U$ appartient à l'orbite B_uM_0B.
(2) ⇒ (3). Notons A_k la matrice extraite de A en gardant les k premières lignes et colonnes. Si $A = LU$, la formule du produit par blocs montre que $A_k = L_kU_k$. Comme L et U sont inversibles triangulaires, leurs mineurs $\det(L_k)$ et $\det(U_k)$ sont non nuls donc les mineurs principaux $\det(A_k)$ de A sont non nuls.
(3) ⇒ (2). Pour la démonstration de cette implication nous renvoyons à Ph. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, chapitre 4, § 4.3. □

Nous nous contenterons ici de résoudre à la main le cas $n = 3$:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & 1 & 0 \\ q & r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & t & u \\ 0 & v & w \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & t & u \\ ps & pt+v & pu+w \\ qs & qt+rv & qu+rw+x \end{pmatrix}.$$

La résolution est immédiate :

- $s = a$, $t = b$, $u = c$;
- $p = d/a$, $q = g/a$ nécessite l'inversibilité du premier mineur principal de A ;
- $v = e - \frac{db}{a} = \frac{ae-db}{a}$, $w = f - \frac{dc}{a} = \frac{af-cd}{a}$;
- $r = \frac{h-qt}{v} = \frac{ha-bg}{ae-db}$ nécessite l'inversibilité du second mineur principal de A ;
- $x = i - qu - rw = i - \frac{gc}{a} - \frac{(ha-bg)(af-dc)}{a(ae-db)}$.

Remarque. Les raisons pour lesquelles la décomposition de Bruhat est importante dépassent un peu le cadre de ce cours, mais nous pouvons tout de même en donner une idée. Gardons les notations précédentes pour $G = \mathrm{GL}_n(k)$, dans lequel B est le stabilisateur du drapeau standard. L'ensemble des drapeaux complets de $E = k^n$, ou *variété des drapeaux*, est muni d'une action transitive de G et s'identifie donc (via la relation stabilisateur-orbite) avec l'espace quotient G/B. La variété des drapeaux est un objet fondamental car on peut montrer que si $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ c'est un espace compact ; c'est même le plus grand quotient compact de G. (Si le corps k est quelconque, il existe d'autres moyens d'exprimer cette propriété de compacité.) La compacité a des conséquences très importantes pour l'étude de G et de ses représentations. La décomposition de Bruhat $G = \coprod_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} B \cdot M_\sigma \cdot B$ induit une décomposition dans la variété des drapeaux

$$G/B = \coprod_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} B \cdot \overline{M}_\sigma$$

qui est un outil précieux pour la comprendre. On peut étudier tout ceci dans un cours plus avancé, en M2 par exemple.