6. Simplicité de PSL

Lors de l'étude des transvections, nous avons souligné le fait classique que les homothéties $(\neq 0)$ sont exactement les transformations qui préservent toutes les droites : $g \in GL(E)$ t.q. $g(D) = D$ pour toute droite D. En corollaire, elles constituent le centre Z de GL (et celles de dét $= 1$ i.e. $Z(GL) \cap SL$ constituent le centre de SL).

Ceci signifie que Z est le noyau de l'action naturelle de $GL(E)$ sur l'ensemble

$$\mathbb{P}(E) = \{ \text{droites vectorielles } D \subset E \}.$$

Cet ensemble est appelé espace projectif des droites de E, la lettre « P » est pour projectif et c'est ce lien avec $\mathbb{P}(E)$ qui explique la terminologie suivante :

Déf $PGL(E) \overset{\text{def}}{=} GL(E)/_{Z(GL(E))}$ groupe projectif général linéaire de E,

$PSL(E) \overset{\text{def}}{=} SL(E)/_{Z(SL(E))}$ groupe projectif spécial linéaire de E.

Ces groupes étant introduits, revenons à la question de la simplicité qui est l'objet de cette section. On commence par une observation :

Prop Soit G un groupe, Z son centre, G' son groupe dérivé.

(1) Tout sous-groupe de Z est distingué dans G.

(2) Tout sur-groupe de G' est distingué dans G.

Dém (1) Si $H \subset Z$, pour tous $h \in H, g \in G$ on a $ghg^{-1} = h \in H$.

(2) Soit $H \supset G'$ un sur-groupe de G'. Soit $\pi : G \to G/_{G'} =: G^{ab}$ la projection. On a $H = \pi^{-1}(\pi(H))$ où $\pi(H) \subseteq G^{ab}$ est distingué (comme tout sous-groupe d'un groupe abélien !).

Il en découle que H est distingué dans G $\boxtimes$

Exercice démontrer directement que $H \supset G'$ est distingué, en utilisant le fait que H contient tous les commutateurs.

Remarque a posteriori on verra que pour $G = GL(E)$, sauf dans le cas exceptionnel de $GL_2(\mathbb{F}_3)$, la liste composée des sous-groupes de Z et des sur-groupes de G' fournit tous les sous-groupes distingués de G.

Revenons à $G = GL(E)$. Nous avons vu qu'il n'est pas simple puisque (sauf exceptions) son groupe dérivé est $SL(E)$. De même, ce dernier n'est pas simple en général puisque $Z(SL(E)) \simeq \mu_n(k) \neq 1$.

Théorème
Le groupe $PSL(n,k)$ est simple, sauf dans les deux cas suivants :
1) $n = 2$, $k = \mathbf{F}_2$,
2) $n = 2$, $k = \mathbf{F}_3$.

Nous suivons [Perrin, Cours d'algèbre, Ellipses, Chapitre IV, §4].
Nous donnerons la démonstration dans le cas $n \geqslant 3$; le cas $n \geqslant 2$ n'apporte pas véritablement d'idée nouvelle et la lectrice et le lecteur le trouveront exposé en détail dans [Perrin].

Soit E un k-espace vectoriel de dimension n et soit $\overline{N}$ un sous-groupe distingué de $PSL(E)$, non réduit à l'élément neutre. Par image réciproque il lui correspond un sous-groupe distingué N de $SL(E)$, contenant le centre Z de $SL(E)$, et distinct de Z, et il faut montrer que l'on a $N = SL(E)$.

Comme les transvections engendrent $SL(E)$ (cf. 2.11) et sont toutes conjuguées (cf. 2.17), il suffit de montrer que l'une d'elles est dans N.

L'idée est la suivante : on dispose au départ d'un élément $\sigma \in N$, non trivial. On fabrique de nouveaux éléments de N comme commutateurs :

$$\text{si } \tau \in SL(E), \text{ alors } \rho = \sigma(\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}) \in N.$$

Si τ est une transvection d'hyperplan H, $\sigma\tau\sigma^{-1}$ est une transvection d'hyperplan $\sigma(H)$, donc $\rho = (\sigma\tau\sigma^{-1})\tau^{-1}$ est produit de deux transvections et sera même une transvection si on a $\sigma(H) = H$ et $\rho \neq \mathrm{Id}$. On va donc chercher à construire un élément de N qui laisse globalement invariant un hyperplan.

Précisons maintenant tout cela : soit $\sigma \in N$, $\sigma \notin Z$. Comme σ n'est pas une homothétie, il existe $a \in E$ tel que $b = \sigma(a)$ ne soit pas colinéaire à a. Soit τ une transvection de droite $<a>$ et posons $\rho = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$. Soit H un hyperplan de E contenant le plan $<a, b>$ (il en existe, puisqu'on a $n \geq 3$).
On a alors les trois propriétés suivantes :

1) $\rho \in N$ et $\rho \neq \mathrm{Id}$,
2) $\forall x \in E, \quad \rho(x) - x \in H$,
3) $\rho(H) = H$.

En effet, il est clair que ρ est dans N. Si on avait $\rho = \mathrm{Id}$, on aurait $\tau = \sigma\tau\sigma^{-1}$, mais ces transvections ont respectivement pour droites $<a>$ et $<b>$ et on a $<a> \neq <b>$. Pour le point 2), on remarque (cf. 2.2.5) qu'on a $\rho(x) - x \in <a, b> \subset H$ et 3) en résulte aussitôt.

Deux éventualités sont alors possibles :

a) Il existe une transvection u, d'hyperplan H qui ne commute pas à ρ. Alors, si on pose $v = \rho u \rho^{-1} u^{-1}$, on a $v \in N$, $v \neq \mathrm{Id}$ et v est produit des transvections u^{-1}, d'hyperplan H et $\rho u \rho^{-1}$, d'hyperplan $\rho(H) = H$, donc v est une transvection non triviale de N.

b) Sinon, ρ commute à toutes les transvections d'hyperplan H. Soit $f \in E^*$ une équation de H et u une transvection de vecteur $c \in H$ qui s'écrit :

$$u(x) = x + f(x)c.$$

On a $\rho u = u \rho$, donc, pour tout x de E :

$$\rho(x) + f(x)\rho(c) = \rho(x) + f(\rho(x))\, c.$$

Soit $x \notin H$, comme $\rho(x) - x \in H$, on a $f(\rho(x)) = f(x) \neq 0$, d'où $\rho(c) = c$. Mais ceci vaut pour tout $c \in H$, donc on a $\rho|_H = \mathrm{Id}$ et, comme ρ est de déterminant 1, ρ est déjà une transvection.

Dans les deux cas, on voit que N contient une transvection, donc $N = SL(E)$, ce qui achève la démonstration du cas $n \geq 3$.