2. Transitivité des actions de groupes

Pour préparer la suite nous donnons quelques compléments sur la transitivité.

Déf 1 Soit G un groupe agissant sur un ensemble X, et $k \geq 1$ entier.

L'action (vue comme $G \times X \to X$ ou $G \to \mathrm{Bij}(X)$) est dite :

- *fidèle* si le morphisme $G \to \mathrm{Bij}(X)$ est injectif
- *libre* si tous les stabilisateurs sont réduits à $\{1\}$
- *transitive* si pour tous $x, y \in X$ il existe $g \in G$ tel que $y = gx$
- *simplement transitive* si elle est libre et transitive
- *k-transitive* si l'action induite de G sur l'ensemble $X^k \setminus \Delta$ des k-uplets d'éléments distincts de X est transitive
- *simplement k-transitive* si l'action de G sur $X^k \setminus \Delta$ est libre et transitive.

Ici $X^k \setminus \Delta = \{(x_1, \dots, x_k) \in X^k \; ; \; x_i \neq x_j \text{ pour tous } i \neq j\}$ est le complémentaire dans X^k de la « diagonale épaisse »

$$\Delta = \{(x_1, \dots, x_k) \in X^k ; \text{ au moins deux des } x_i \text{ sont égaux}\}.$$

Rem 1) action transitive $\Leftrightarrow$ une seule orbite $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X$, $\mathrm{ev} : \begin{array}{l} G \to X \\ g \mapsto gx \end{array}$ surjective

2) action simplement transitive $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X$, $\mathrm{ev} : G \to X$ bijective.

3) pour agir k-transitivement, le groupe doit être « assez gros ». Par exemple, si G et X sont finis, la surjectivité de $\mathrm{ev}_{(x_1, \dots, x_k)} : G \to X^k \setminus \Delta$ impose l'inégalité $\boxed{|G| \geq n(n-1) \cdots (n-k+1)}$

(où $n := |X|$)

Il existe une terminologie synonyme très utilisée en géométrie :

Déf 2 Soit G agissant sur X.

(1) On dit que X est un *espace homogène sous G* si $X \neq \emptyset$ et l'action est transitive.

(2) On dit que X est un espace principal homogène sous G si $X \neq \emptyset$ et l'action est libre et transitive. ⊠

Comme indiqué dans la remarque 2) ci-dessus, dans un EPH tout choix d'un point $x \in X$ fournit une bijection $G \xrightarrow{\sim} X$. Autrement dit, un EPH sous G c'est un espace qui est « comme G mais sans point privilégié ».

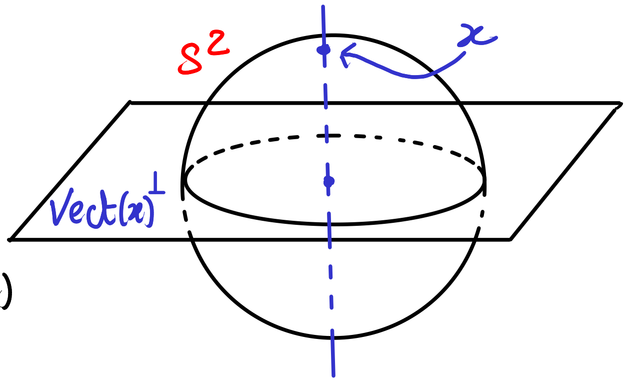
<u>Exemples</u>

1) L'ensemble {lundi, mardi, mercredi, jeudi, vendredi, samedi, dimanche} des jours de la semaine est un EPH sous $G = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.
Idem avec l'ensemble {do, ré, mi, fa, sol, la, si} des notes de la gamme musicale.

2) L'ensemble $\mathcal{B} = \{$bases du k-EV $E\}$ est un EPH sous $GL(E)$.

3) Le cercle S^1 est un EPH sous le groupe des rotations $SO_2(\mathbb{R})$.
La sphère S^2 est un espace homogène non principal sous le groupe $G = SO_3(\mathbb{R})$. Le stabilisateur d'un point $x \in S^2$ est le groupe

$$G_x = SO\left(\mathrm{Vect}(x)^\perp\right) \simeq SO_2(\mathbb{R}).$$



La relation stabilisateur-orbite $G/G_x \simeq O(x)$ prend la forme $SO_3(\mathbb{R})/SO_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} S^2$.

4) Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes, et $K := \ker(f)$.
Pour $h \in H$ on appelle <u>fibre de f en h</u> l'ensemble $f^{-1}(h) = \{g \in G, f(g) = h\}$.
Il est clair que si $k \in K$ et $g \in f^{-1}(h)$, alors $kg \in f^{-1}(h)$ si bien que le noyau K agit sur chaque fibre $f^{-1}(h)$. Cette action est libre et transitive, donc <u>les fibres non vides sont des EPH sous K</u>.
En fait, si $x \in f^{-1}(h)$ alors la fibre $f^{-1}(h)$ n'est autre que la classe Kx (classe à gauche ou à droite, c'est pareil puisque K est distingué).