Chap 3. GÉOMÉTRIE VECTORIELLE ET GROUPES LINÉAIRES

1. Comment fait-on de la géométrie ?

- Je pose la question de manière très large : à l'école, à l'Université, dans les sciences, dans les livres de math, comment fait-on de la géométrie ? Au début de la vie (École maternelle et primaire) et de l'Humanité (mathématiciens antiques voire préhistoriques), on dessine des figures. Les mathématiciens grecs de l'Antiquité traçaient des triangles sur le sable, et 20 siècles plus tard on peut faire découvrir la concourance des médiatrices aux élèves de primaire.
- Une révolution a lieu avec Descartes (Géométrie, 1637) qui introduit les coordonnées cartésiennes, apportant ainsi toute la puissance calculatoire des nombres pour étudier les formes (avant lui, les liens entre arithmétique et géométrie étaient plus ténus). Quelques siècles plus tard, avec le développement de l'algèbre moderne, la prolongation naturelle de ces idées mène à fonder la géométrie sur l'algèbre linéaire, comme on le fait souvent dans l'enseignement pour la bonne raison qu'ainsi la théorie déroule si bien.
- Lorsqu'on fait de la géométrie dans un espace vectoriel (ou affine, projectif ...), on est parfois amené à choisir une base pour faire un calcul explicite en coordonnées. Ceci ne doit pas faire oublier que les propriétés géométriques sont celles qui ne dépendent pas du choix d'une base. Comme l'écrivent Ph. Caldero

et J. Germoni dans l'avant-propos du livre

Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries, tome 1, Calvage et Mounet

dont je recommande la lecture, on peut même voir là une définition de ce qui est géométrique. Citons cet avant-propos :

> Les mathématiques sont souvent affaire de classification, et classer, finalement, c'est partitionner et étiqueter. Un groupe sera vu et utilisé comme une « machine à partitionner » ; effectivement, si l'on comprend qu'une partition d'un ensemble n'est rien d'autre qu'une relation d'équivalence dans cet ensemble, on comprend alors aussi que la triade réflexif-symétrique-transitif puisse se traduire par cette autre, neutre-symétrique-associatif, qui définit la notion de groupe. L'étiquetage, de son côté, sera l'objet de la recherche d'invariants.
> La notion de groupe liée à la classification et les invariants ne se rencontre pas qu'en algèbre. Pensons par exemple à une courbe paramétrée dans le plan, disons une application de classe $\mathscr{C}^1$, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$. Avec un difféomorphisme $\varphi : [0,1] \to [0,1]$, on peut reparamétrer l'arc décrit par γ en considérant : $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$. Mais les propriétés intéressantes, c'est-à-dire géométriques, sont celles qui sont invariantes par changement de paramétrage : points singuliers, longueur, rayon de courbure... Et cela constitue presque une définition de ce qu'est une propriété géométrique, à savoir : indépendance à l'égard du paramétrage.

Les démonstrations effectuées sans choix de base ou de repère, outre qu'elles apportent une meilleure compréhension de la situation, sont souvent plus élégantes et légères. On essaiera donc de ne pas céder trop rapidement à la tentation de « fixer une base » et « faire un calcul matriciel ».