2. Générateurs de S_n et A_n

Rappels :

Par sa définition même, S_n agit sur $\{1,\dots,n\}$. Chaque $\sigma \in S_n$ (ou pour être plus précis le sous-groupe $H = \langle\sigma\rangle$ engendré par σ) agit donc aussi, par restriction. La décomposition en orbites

$$\{1,\dots,n\} = \underset{\uparrow}{O_1} \sqcup \dots \sqcup \underset{\nearrow}{O_t} = \underbrace{\{1,\sigma(1),\sigma^2(1),\dots\}}_{\text{orbite de } 1} \sqcup \dots$$

orbites de $H = \langle\sigma\rangle$

donne naissance à la décomposition en cycles à supports disjoints où (par convention) on ne fait apparaître que les orbites O_i non ponctuelles (càd non réduites à un point).

Un cycle (resp un k-cycle) est une permutation $c \neq 1$ qui possède une unique orbite non ponctuelle (de cardinal k).

On peut vérifier que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-t}$ (t = nb d'orbites, y compris ponctuelles) ce qui fournit si on veut une définition alternative de la signature.

Prop Le groupe S_n est engendré par chacune des parties suivantes :

(i) l'ensemble des cycles

(ii) l'ensemble des transpositions (= 2-cycles)

(iii) l'ensemble $\{(1,i),\ i = 2\dots n\}$ à $n-1$ éléments

(iv) l'ensemble $\{(i,i+1),\ i = 1,\dots,n-1\}$ $n-1$ éléments

(v) l'ensemble $\{(1,2),\ (1,2,\dots,n)\}$ à 2 éléments.

Dém voir cours de Licence ⊠

Pour certaines applications, il est utile de disposer d'une partie génératrice de petite taille ; dans ce cas (5) est la meilleure.

Pour d'autres applications (notamment simplicité pour A_n, cf ci-dessous), ce sont d'autres propriétés des parties génératrices qui sont utiles.

Par exemple, si on note A la partie génératrice considérée :

1 le fait que les éléments $\sigma \in A$ aient une action sur $\{1, \dots, n\}$ la plus « simple » possible, et plus précisément qu'ils soient le plus proche possible de l'identité. Ceci signifie que $\mathrm{Supp}(\sigma)$ doit être aussi petit que possible : les transpositions s'imposent.

2 le fait que la partie A soit globalement invariante par les conjugaisons, qui permet d'exploiter la transitivité de l'action.

Avec ces critères, la partie (ii) est la meilleure.

<u>Prop</u> Le groupe alterné A_n est engendré par chacune des parties suivantes :

(1) l'ensemble des 3-cycles

(2) l'ensemble des 3-cycles de la forme $(1, i, j)$

(3) (si $n > 3$) les 2 permutations $\begin{cases} (1,2,3) \text{ et } (3,4,\dots,n) & \text{si } n \text{ impair} \\ (1,2,3) \text{ et } (1,2)(3,4,\dots,n) & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$

<u>Dém</u> Cours de Licence et/ou exercice ⊠

Un rappel :

<u>Prop</u> Si $n \geq 5$, les 3-cycles sont conjugués dans A_n.

<u>Dém</u> : Perrin, Chap I, Prop 4.10 ⊠

De même que pour le groupe symétrique, dans le groupe alterné la partie composée des 3-cycles vérifie 1 et 2 ce qui est agréable !