# Chap 2. GROUPES SYMÉTRIQUES ET ALTERNÉS

(En principe ce sont des rappels du cours de L3)

## 1. La signature

Réf : Lang, Algèbre, éditions Dunod, chapitre 1.

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Il y a une manière de définir la signature qui est agréable parce qu'elle montre « sans calcul » que celle-ci est un morphisme. Pour cela on passe par l'action du groupe symétrique $S_n$ sur l'anneau de polynômes $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ par permutation des variables, définie par

$\sigma : \mathbb{C}[X_1,\dots,X_n] \to \mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$, $P \mapsto \sigma P$ est $\mathbb{C}$-linéaire et même mor. d'anneaux !

$$\boxed{(\sigma.P)(X_1,\dots,X_n) = P(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)})}$$ pour $\sigma \in S_n$ et $P \in \mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$.

Ex $n=3$, $\sigma=(123)$, $P = X_1^2 + X_2X_3$, $\sigma.P = X_2^2 + X_3X_1$.

Exercice vérifier que la formule ci-dessus définit une action !

L'objet crucial est le polynôme de Vandermonde(★)

$$V_n = V_n(X_1,\dots,X_n) \overset{\text{def}}{=} \prod_{i<j} (X_j - X_i) \quad \text{si } n \geqslant 2, \text{ et } V_1 = 1.$$

Exercice montrez que $V_n$ est le déterminant de la matrice de Vandermonde ci-contre.

$$\begin{pmatrix} 1 & X_1 & X_1^2 & \dots & X_1^{n-1} \\ 1 & X_2 & X_2^2 & \dots & X_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & X_n & X_n^2 & \dots & X_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Par exemple, $V_3 = (X_2 - X_1)(X_3 - X_1)(X_3 - X_2)$ et si $\sigma = (12)$ on a

$$\sigma.V_3 = (X_1 - X_2)(X_3 - X_2)(X_3 - X_1) = -V_3.$$

(les $i<j$ sont : $1<2$, $1<3$ et $2<3$)

(★) Alexandre-Théophile Vandermonde, 1735-1796.

**Prop** Soit $n\geq 1$. Pour tout $\sigma\in S_n$, il existe $\varepsilon(\sigma)\in\{\pm1\}$ tel que $\sigma V_n=\varepsilon(\sigma)V_n$.

De plus $\varepsilon : S_n\to\{\pm1\}$ est un morphisme de groupes.

**Dém** On calcule $\sigma . V_n=\prod_{i<j}(X_{\sigma(j)}-X_{\sigma(i)})$ et on observe que

$$X_{\sigma(j)}-X_{\sigma(i)}=\begin{cases}(X_{\sigma(j)}-X_{\sigma(i)}) & \text{si } \sigma(i)<\sigma(j)\\ -(X_{\sigma(i)}-X_{\sigma(j)}) & \text{si } \sigma(i)>\sigma(j)\end{cases}$$

où dans chaque cas la parenthèse est un des facteurs du produit qui définit $V_n$. Un signe $-1$ apparaît chaque fois que $i<j$ et $\sigma(i)>\sigma(j)$ (auquel cas on dit que $(i,j)$ est une inversion pour $\sigma$), et $\varepsilon(\sigma)$ est le produit de ces signes. Enfin, comme on est en présence d'une action de groupes, si $\sigma,\tau\in S_n$ on a

$$\begin{array}{l}(\sigma\tau).V_n=\sigma.(\tau V_n)=\sigma(\varepsilon(\tau)V_n)\underset{\uparrow}{=}\varepsilon(\tau)\,\sigma V_n=\varepsilon(\tau)\varepsilon(\sigma)V_n\\ \quad\Vert\\ \varepsilon(\sigma\tau)V_n\end{array}$$

car $\sigma$ agit sur $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$ par automorphismes $\mathbb{C}$-linéaires

En égalisant les coefs dominants on trouve $\varepsilon(\sigma\tau)=\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ càd que $\varepsilon$ est un morphisme de groupes $\boxtimes$

**Déf** Soit $n\geq1$. On appelle <u>Signature</u> le morphisme $\varepsilon : S_n\to\{\pm1\}$ construit ci-dessus.

**Rem** $\varepsilon$ est surjectif lorsque $n\geq 2$ mais pas lorsque $n=1$.

**Déf** Le groupe $A_n=\ker(\varepsilon)$ est appelé <u>groupe alterné</u>.

Les permutations $\sigma\in A_n$ sont dites <u>paires</u>, les autres <u>impaires</u>.

On a la suite exacte : $1\to A_n\to S_n\xrightarrow{\varepsilon}\{\pm1\}\to 1$.