5. Actions de groupes

Voici le concept central de ce cours : les actions. Jusqu'à présent nous ne l'avons pas utilisé ; on peut considérer que les § précédents étaient des variations & compléments sur le thème des sous-groupes distingués.

Déf Une *action*(★) d'un groupe G sur un ensemble X est une application

$G \times X \to X$ notée $(g,x) \mapsto gx$ et telle que (i) $1x = x$

pour tous $x \in X$, $g,h \in G$. (ii) $g(hx) = (gh)x$

produit dans G

action de G sur X

L'application d'action est une fonction de deux variables.
Si on fixe la variable g on obtient une application

abus d'écriture habituel

$$g : \begin{array}{rcl} X & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & gx \end{array}$$

qui est une bijection d'inverse g^{-1} à cause de (i) et (ii).

Remarque

Si X est un espace topologique et chaque $g : X \to X$ est un homéomorphisme, on dit que « G agit sur X par homéomorphismes ».
Si X est un k-espace vectoriel et chaque $g : X \to X$ est k-linéaire, on dit que « G agit sur X linéairement ». etc !

Les axiomes de la définition d'une action montrent que

$$\begin{array}{rcl} G & \longrightarrow & \mathfrak{S}_X = \{\text{bijections de } X\} \\ g & \longmapsto & (\text{l'application } g : X \to X) \end{array}$$

est un morphisme de groupes. C'est en fait une autre manière de formuler la définition.

(★) La terminologie d' « opération » est synonyme mais est de moins en moins utilisée.

Si on fixe maintenant la variable x c'est très intéressant.

On obtient une application

$$\begin{aligned} ev_x : G &\longrightarrow X \\ g &\longmapsto gx \end{aligned}$$

appelée application d'évaluation en x puisqu'elle « évalue » g en x.
Etudier injectivité & surjectivité de ev_x mène aux concepts suivants :

Déf le stabilisateur de x : $G_x = \{g \in G, gx = x\}$ est un sous-groupe de G.

Prop ev_x est injective ssi $G_x = 1$.

Dém $ev_x(g_1) = ev_x(g_2)$ ssi $g_2^{-1} g_1 \in G_x$ ☒

Déf L'orbite de x : $O(x) = \{gx \in X, g \in G\} = ev_x(G)$ est une partie de X.

La relation sur X définie par

$$x \sim y \iff \exists g \in G,\ y = gx \iff O(x) = O(y)$$

est une relation d'équivalence dont les classes sont les orbites.
La partition de X associée est appelée partition en orbites.

On a la bijection fondamentale suivante :

Th (Relation orbite-stabilisateur) L'application $ev_x : G \to X, g \mapsto gx$ induit une bijection $G/G_x \xrightarrow{\sim} O(x)$.

Dém Attention, il n'y a pas de raison que G_x soit un sous-groupe distingué. Le quotient G/G_x est l'ensemble quotient de G par la relation d'équivalence sur G définie par la multiplication à droite par les éléments de G_x :

$$g_1 \sim g_2 \text{ ssi il existe } \gamma \in G_x \text{ t.q. } g_2 = g_1 \gamma.$$

Lorsqu'on est habitué au passage au quotient par une relation d'équivalence, la dém. du théorème découle directement de la déf. de G_x et $\mathcal{O}(x)$ (et de la proposition ci-dessus sur l'injectivité de ev_x). Donnons des détails.

Notons $\pi : G \to G/G_x$ l'application de quotient de G par la relation d'équivalence ci-dessus; elle est surjective.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "ev_x"] \arrow[dr, "\pi"'] & & X \\ & G/G_x \arrow[ur, "\overline{ev}_x"'] & \end{tikzcd}$$

On définit une application $\overline{ev}_x : G/G_x \to X$ de la manière suivante : à une classe d'équivalence $g_1 G_x$ représentée par un $g_1 \in G$, on associe $g_1 x$. Ceci ne dépend pas du choix de l'élément g_1 choisi pour représenter la classe, car un autre représentant g_2 est de la forme $g_2 = g_1 \gamma$ (pour un $\gamma \in G_x$) donc $g_2 x = g_1 \gamma x \underset{\gamma \in G_x}{=} g_1 x$.

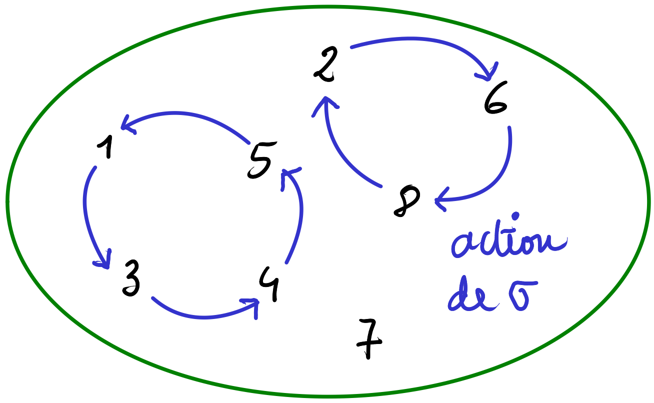
Exemples

① Par définition, le groupe $G = S_n$ agit sur $\{1, \dots, n\}$ et le stabilisateur $G_i = \{\sigma \in S_n, \sigma(i) = i\}$ de i

est un sous-groupe isomorphe à S_{n-1} (permutations de $\{1,\dots,\hat{i},\dots,n\}$) et l'orbite de i est $\{1,\dots,n\}$ entier. On dit que l'action est transitive.

Le groupe $\langle\sigma\rangle$ engendré par une permutation σ agit sur $\{1,\dots,n\}$ et les orbites de cette action se lisent dans la décomposition en cycles à supports disjoints : ce sont les supports des cycles.
(Les points fixes de σ, qui sont les orbites réduites à un point, sont en général omis de cette écriture. Exemple dans S_8 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$



$$\sigma = \underbrace{(1\,3\,4\,5)}_{O(1)}\underbrace{(2\,6\,8)}_{O(2)} \qquad X = \{1,2,\dots,8\}$$

La partition en orbites est

$$X = O(1) \sqcup O(2) \sqcup O(7) = \{1,3,4,5\} \sqcup \{2,6,8\} \sqcup \underbrace{\{7\}}_{\text{point fixe}}$$

L'ordre de σ est le ppcm des ordres des cycles : 12.

$$G = \langle\sigma\rangle \simeq \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$$

$$G_1 = \text{Stab. de } 1 = \{1, \sigma^4, \sigma^8\}, \quad G_2 = \{1, \sigma^3, \sigma^6, \sigma^9\}, \quad G_7 = G.$$

② $G = GL_n(k)$ agit transitivement sur les vecteurs de $E = k^n$.
Le stabilisateur du vecteur $e_1 = (1,0,\dots,0)$ est
$$G_{e_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & * \\ \vdots & \end{pmatrix} \right\}$$

Ce même groupe agit sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E, par la formule $g.F \overset{\text{déf}}{=} g(F)$, le sous espace image.
Les orbites sont paramétrées par la dimension des sous-espaces, ce sont les ensembles appelés Grassmanniennes :

$$Gr(k,n) = \{\text{sous-e.v. } F \subset E \text{ de dimension } k\}.$$

(la Grassmannienne des k-plans de E).