3. Groupes simples et facteurs simples des groupes

Déf un groupe G est simple ssi $G \neq \{1\}$ et ses seuls sous-groupes distingués sont $\{1\}$ et G.

Rem le mot « simple » sert ici à décrire un objet irréductible, comme un nombre premier, un élément irréductible d'un anneau factoriel, ou une particule élémentaire qu'on ne peut pas « casser en morceaux ». Cette terminologie a le léger inconvénient qu'un groupe simple, comme il ne peut être cassé en des morceaux H et G/H, est souvent... compliqué à étudier ☹

Les nombres premiers servent à décrire tous les entiers de manière transparente grâce au th. fondamental de l'Arithmétique aussi appelé Décomposition en Facteurs Premiers ($n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$).

Pour les groupes, la situation est plus compliquée, mais nous allons voir que pour les groupes finis au moins, la liste de leurs facteurs simples est bien définie.

Déf Une suite de composition (stricte) d'un groupe G est une chaîne de sous-groupes distingués les uns dans les autres, de la forme

$$G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \dots \triangleright G_{n-1} \triangleright G_n = 1.$$

Souvent on demande que les inclusions soient strictes

La longueur de la suite est le nombre d'inclusions, ici n.

Une suite de Jordan(★)-Hölder(★★) de G est une suite de composition dont les quotients $Q_i = G_{i-1}/G_i$ sont simples.

(★) Camille Jordan, 1838-1922. (★★) Otto Hölder, 1859-1937.

Rem Lorsqu'on écrit une suite de composition, il est sous-entendu que les inclusions sont distinguées, et on les note donc souvent $\supset$ plutôt que $\triangleright$.

Rem parfois, pour des groupes infinis comme $G = \prod_{i \geq 0} \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ par ex., il n'existe pas de suite de JH (sous-entendu : finie).

Parfois il en existe plusieurs : ainsi pour $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ on a $G \supset \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \supset 1$ et $G \supset \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \supset 1$.

Les quotients d'une suite de JH ne suffisent pas à déterminer un groupe : par exemple $G = S_4$ avec suite de JH

$$G \underset{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}{\supset} A_4 \underset{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}{\supset} V \underset{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}{\supset} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \underset{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}{\supset} 1$$

(on a indiqué les quotients respectifs sous les signes d'inclusion) a même quotients que $G' = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

NB Ici $V = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ est le groupe des doubles transpositions de A_4. On l'appelle aussi « groupe de Klein » et la lettre V est l'initiale de Vierergruppe.

But pour la suite : montrer que lorsqu'un groupe possède des suites de JH, celles-ci ont toute "la même" liste non-ordonnée de quotients $\{Q_1, \dots, Q_n\}$: th. de Jordan-Hölder. Celle-ci est appelée liste des facteurs de Jordan-Hölder de G.

Déf Soient $\Sigma : G \supset G_1 \supset \dots \supset G_{n-1} \supset 1$ deux suites de composition
$$\Sigma' : G \supset H_1 \supset \dots \supset H_{p-1} \supset 1$$
On dit que Σ' est un <u>raffinement</u> de Σ si Σ est une suite extraite de Σ', càd que certains H_j sont omis ; en particulier $p \geq n$. On dit que Σ et Σ' sont <u>équivalentes</u> si les listes non ordonnées de quotients $\{Q_i\}$ et $\{Q'_j\}$ à isomorphismes près sont les mêmes, càd que $n = p$ et il existe une permutation $\sigma \in S_n$ t.q $Q'_i \simeq Q_{\sigma(i)}$ $\forall i$.

th (Schreier(★)) Si Σ_1, Σ_2 sont deux suites de composition d'un groupe G, elles possèdent des raffinements Σ'_1, Σ'_2 équivalents.

Dém $\Sigma_1 = (G \supset G_1 \supset \dots \supset G_{n-1} \supset 1)$, $\Sigma_2 = (G \supset H_1 \supset \dots \supset H_{p-1} \supset 1)$

Pour $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$ on pose :
$$\begin{cases} G_{i,j} = G_i (G_{i-1} \cap H_j) \\ \\ H_{j,i} = H_j (H_{j-1} \cap G_i) \end{cases}$$
Ceci permet de raffiner Σ_1, Σ_2 en deux suites de longueur np :

$G_{i-1} \supset G_{i,1} \supset \dots \supset G_{i,p} \supset G_i$: on insère p inclusions entre G_{i-1} et G_i

$H_{j-1} \supset H_{j,1} \supset \dots \supset H_{j,n} \supset H_j$ — " — n ——— " ———

et le lemme de Zassenhaus entraîne que l'on a

$G_{i,j} \triangleleft G_{i,j-1}$, $H_{j,i} \triangleleft H_{j,i-1}$ et des isomorphismes
$$G_{i,j-1}/G_{i,j} \xrightarrow{\sim} H_{j,i-1}/H_{j,i} .$$
Ceci démontre que les suites raffinées sont équivalentes ☒

(★) Otto Schreier, 1901-1929.

Th (Jordan-Hölder) (Calais, VII, th. 7.12 p. 231)
Soit G un groupe qui admet une suite de Jordan-Hölder.

(1) Toute suite de composition strictement décroissante (càd à inclusions strictes) admet un raffinement qui est une suite JH.

(2) Deux quelconques suites de JH de G sont équivalentes.

Rem bien sûr, un groupe fini possède toujours une suite de JH, parce que la longueur d'une suite de composition strictement décroissante $G \supsetneq G_1 \supsetneq \dots \supsetneq G_{n-1} \supsetneq 1$ est bornée par l'ordre $|G|$, donc il existe une telle suite Σ de longueur n maximale, et les quotients G_{i-1}/G_i sont alors nécessairement simples car sinon la préimage H dans G_{i-1} d'un sous-groupe distingué

$$1 \subsetneq \bar{H} \subsetneq G_{i-1}/G_i$$

fournirait un raffinement $G_{i-1} \supsetneq H \supsetneq G_i$, en contradiction avec la maximalité de n.

Dém du th : on fixe une suite de Jordan-Hölder Σ_0.

(1) Soit Σ une suite de comp. strictement décroissante. Par le th. de Schreier il existe des raffinements équivalents Σ' et Σ'_0 pour Σ et Σ_0. Comme Σ_0 n'a pas de raffinement propre (ou strict ; cf la remarque ci-dessus) on a $\Sigma'_0 = \Sigma_0$ donc $\Sigma' \sim \Sigma_0$ qui est donc une suite JH raffinant Σ

(2) Si Σ est une suite JH, le raffinement Σ' est égal à Σ d'où $\Sigma \sim \Sigma_0$ comme annoncé $\boxtimes$