2. Les théorèmes d'isomorphisme

Ces énoncés, aussi appelés « théorèmes d'isomorphisme de Noether »(★) donnent des relations entre sous-groupes et quotients dans G.
Je vous encourage à les démontrer en exercice, en vous aidant éventuellement du livre de J. Calais.

1er th. d'isomorphisme (Calais, II th 2.27 p.83)

Tout morphisme de groupes $f: G \to G'$ induit un isomorphisme

$$G/_{\ker(f)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}(f).$$

2ème th. d'isomorphisme (Calais, IV th. 4.34 p. 153)

Pour tout sous-groupe distingué $H \triangleleft G$ et tout sous-groupe $K \subset G$, on a un isomorphisme $K/_{H\cap K} \xrightarrow{\sim} HK/_H$.

3ème th. d'isomorphisme (Calais, IV th 4.36 p 155)

Pour tous sous-groupes distingués $H, K \triangleleft G$ tels que $H \subset K$, on a un isomorphisme $G/_K \xrightarrow{\sim} {}^{G/H}\!/_{K/H}$.

Remarques

1) c'est toujours mieux de donner l'isom. que de simplement dire qu'il existe. Lorsqu'un isomorphisme est plus naturel ou plus facile à décrire que son inverse, il vaut mieux écrire $\xrightarrow{\sim}$ que $\simeq$ (exemple : isom de bidualité des esp. vect. de dim finie)

2) dans le 2e th. isom il est sous-entendu
   - que $HK := \{hk\ ,\ h \in H, k \in K\}$ est un sous-groupe
   - que $H \cap K \triangleleft K$ et $H \triangleleft HK$.

Si besoin, vérifiez-le !

(★) Emmy Noether, 1882-1935

__Exercice__ L'énoncé suivant est parfois appelé 4ème th. d'isomorphisme :

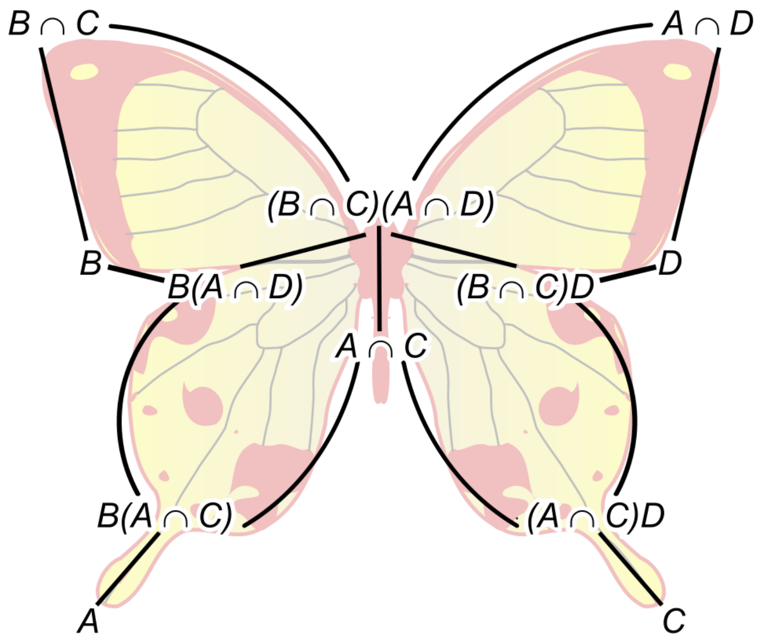
__Lemme de Zassenhaus__(★) (ou lemme du papillon) (Calais, VII Lemme 7.7 p227)

Pour tous sous-groupes $H' \triangleleft H$ et $K' \triangleleft K$ de G on a un isomorphisme :

$$\frac{H'(H\cap K)}{H'(H\cap K')} \xrightarrow{\sim} \frac{K'(H\cap K)}{K'(H'\cap K)}.$$

Ce lemme est dessiné sur la page https://en.wikipedia.org/wiki/Zassenhaus_lemma

avec les notations $B \triangleleft A$ et $D \triangleleft C$.



Indice pour la dém. du lemme de Zassenhaus : démontrez que le membre de gauche est isomorphe à

$$\frac{H\cap K}{(H\cap K')(H'\cap K)}$$

et observez que cette dernière expression est symétrique en H et K.

__Rem terminologique__ il y a dans la littérature des variations sur la numérotation des th. d'isomorphisme, voir

https://en.wikipedia.org/wiki/Isomorphism_theorems#Discussion

(★) Hans Zassenhaus, 1912-1991.