Chap 1. RAPPELS SUR GROUPES ET ACTIONS DE GROUPES

1. Sous-groupes distingués, quotients (rappels sans dém.)

Déf Soit G un groupe. Un sous-groupe $H \subset G$ est distingué (on note : $H \triangleleft G$) si pour tout $g \in G$ on a $gHg^{-1} = H$.

Rem (exercice) il est équivalent de demander : $\forall g \in G$, $gHg^{-1} \subset H$.

Rem (terminologie) On dit aussi sous-groupe normal.

Si $H \triangleleft G$ est distingué, les deux relations d'équivalence

$$g \sim_1 g' \quad \text{ssi} \quad \exists h \in H,\ g' = hg$$
$$g \sim_2 g' \quad \text{ssi} \quad \exists h \in H,\ g' = gh$$

coïncident. On note G/H l'ensemble quotient de G par cette R.E.

Th (existence du quotient)

Soit G groupe et $H \triangleleft G$ distingué. Alors il existe une unique structure de groupe sur G/H telle que l'application surjective canonique $\pi : G \to G/H$ soit un morphisme.

Th (propriété universelle du quotient) ★★★

Soit G un groupe, $H \triangleleft G$ distingué, $\pi : G \to G/H$ le quotient.
Soit $f : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupes tel que $H \subset \ker(f)$.
Alors il existe un unique morphisme de groupes $\bar{f} : G/H \longrightarrow G'$ tel que $f = \bar{f} \circ \pi$ (i.e. le diag. ci-contre commute).

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & G' \\ & G/H \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

De plus (i) $\mathrm{im}(\bar{f}) = \mathrm{im}(f)$

(ii) $\ker(\bar{f}) \simeq \ker(f)/H$.

En particulier un morphisme f surjectif t.q. $H = \ker(f)$ induit un isomorphisme $\bar{f} : G/H \xrightarrow{\sim} G'$.

Rem il est important que vous soyez à l'aise avec les termes qui apparaissent dans le théorème, les abus de terminologie et/ou de notation habituels, et l'utilisation du théorème. S'agissant des abus, éclaircissons le point (ii) : il signifie de manière précise que π envoie $\ker(f)$ dans $\ker(\bar{f})$ et que $\pi_{|\ker f} : \ker f \to \ker \bar{f}$ induit un isomorphisme $\ker(f)/H \xrightarrow{\sim} \ker(\bar{f})$

Vocabulaire on dit que f induit le morphisme $\bar{f}$ par passage au quotient.

Exercice étant donnés $H \triangleleft G$ et $\pi : G \to G/H$, on a des bij. réciproques :

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Sous-groupes de } G \\ \text{contenant } H \end{array} \right\} \underset{\pi^{-1}(L) \leftarrow\!\shortmid L}{\overset{K \mapsto \pi(K) \simeq K/H}{\rightleftarrows}} \left\{ \begin{array}{c} \text{sous-groupes} \\ \text{de } G/H \end{array} \right\}.$$

Ces bijections préservent les sous-groupes distingués de part et d'autre ; de plus si $H \subset K \triangleleft G$ on a un iso. $G/H \big/ K/H \xrightarrow{\sim} G/K$ (troisième théorème d'isomorphisme).

Rem le th implique que tout morphisme de groupes $f : G \to G'$ possède une factorisation canonique :

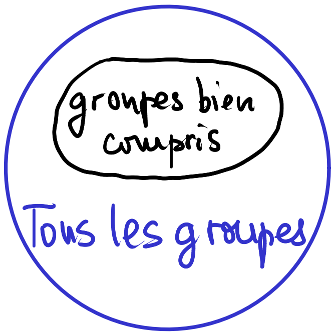
$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & G' \\ & G/\ker(f) \simeq \mathrm{im}(f) \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

(prendre $H = \ker f$).

Remarque ★★★

La valeur du th d'existence du quotient est que c'est un moyen de construction d'un nouveau groupe. Une théorie mathématique est d'autant plus riche qu'elle contient de nombreux exemples ; souvent l'un de ses buts principaux est de les comprendre et les classer. En théorie des groupes les exemples de base sont :

- $(\mathbb{Z},+)$ (construit avec les axiomes de Peano)
- S_n ou $\mathfrak{S}_n$ (le groupe symétrique)
- $GL_n(k)$ (groupe linéaire sur un corps k).



Le jeu consiste alors à bien comprendre les objets de notre catalogue d'exemples, et à élargir progressivement notre catalogue en essayant de faire entrer les nouveaux exemples parmi ceux « bien compris ».
Lorsqu'un nouveau groupe apparaît (par exemple à l'aide du théorème de quotient), deux situations différentes se présentent :

① Soit ce nouveau groupe s'avère être en fait déjà connu : il nous faut alors expliquer comment / pourquoi. Par exemple dans $G = GL_n(k)$ le sous-groupe $H = SL_n(k)$ est distingué, et le quotient $Q = G/H$ est en fait connu. En effet, le morphisme déterminant

$$\det : GL_n(k) \longrightarrow k^\times$$

est surjectif, de noyau H, donc induit (par th.) un iso.

$$\overline{\det} : GL_n(k)/SL_n(k) \xrightarrow{\sim} k^\times .$$

② Soit ce nouveau groupe n'est pas déjà dans notre catalogue d'exemples connus, bien compris. Il nous faut alors lui donner un nom et l'étudier de manière à ce qu'il gagne sa place dans notre catalogue d'objets familiers. Par exemple dans $G = GL_n(k)$ le sous-groupe $H = \{\lambda . I_n, \lambda \in k^\times\}$ des homothéties est distingué, et le quotient G/H n'est pas un exemple déjà connu.
On le <u>nomme</u> groupe projectif linéaire, le <u>note</u> $PGL_n(k)$, et il ne reste qu'à l'étudier !