Groupes analytiques rigides p-divisibles

d'après Fargues.

A. Vezzani
24 mars 2015

§1. Introduction

K = corps valué non arch complet, rk val = 1. car $K=0$

$\mathcal{O}_K = K^0$

But : étudier $BT/\mathcal{O}_K$ lorsque $K=\hat{\bar{K}}$.

Si $G \in BT/\mathcal{O}_K$, $G = \varinjlim G[p^n]$ comme faisceau

$$\downarrow$$

$$G^{form} \in \text{Ind-schémas}$$

$$G^{form} = \varinjlim \operatorname{Spec} \mathcal{O}(G[p^n])$$

représenté par $\mathcal{O}(G^{form}) = \varprojlim \mathcal{O}(G[p^n])$ avec la top $\varprojlim$

Rem (Tate) Si $G = G_0$ connexe, $\mathcal{O}(G^{form}) \cong \mathcal{O}_K[[X_1, \dots, X_d]]$ avec sa topologie (p, X)-adique.

On peut considérer $\operatorname{Spa}(\mathcal{O}(G^{form}), \mathcal{O}(G^{form})) =: G^{ad}$

$$G^{ad} \in \text{Adic}$$

On dispose alors de $G^{ad} \times_{\operatorname{Spa}(\mathcal{O}_K, \mathcal{O}_K)} \operatorname{Spa}(K, \mathcal{O}_K) =: (G^{ad})_\eta \simeq \mathring{\mathbb{B}}^d$

qui n'est pas nécess affinoïde, même si G^{ad} l'est.

On a finalement :

$$G \in BT/\mathcal{O}_K \longmapsto (G^{ad})_\eta \in Rig/K$$

Donnons une description fonctorielle de cet objet :

$$(G^{ad})_\eta(\hat{R}, \hat{R}^+) = \operatorname{Hom}_{cont}(\mathcal{O}(G^{form}), \hat{R}^+)$$

faire affinoïde$/K$

$$= \varinjlim_{\substack{R_0 \subset R^+ \\ \text{anneau de déf}}} \operatorname{Hom}(\mathcal{O}(G^{form}), \hat{R}_0)$$

$$= \varinjlim_{\substack{R_0 \subset \hat{R}^+ \\ \text{anneau de déf}}} G^{form}(\hat{R}_0) \qquad \left(\hat{R}_0 = \varprojlim_n \hat{R}_0/p^n\right)$$

Dans le cas général où $G \neq G_0$ non connexe (nécess.), on posera :

$$(G^{ad})_\eta := \left(\varinjlim_{\substack{R_0 \subset \hat{R}^+ \\ \text{a. de déf}}} G^{form}(\hat{R}_0)\right)^{\text{faisceautisé étale}} \in Sh\left(Aff/_{(K,O_K)}, \text{ét}\right)$$

Rem : G est représentable par un espace rigide sur K.

$\longrightarrow$ G_0 l'est

$\longrightarrow$ (mult par p) est relativement représentable

$\longrightarrow$ $G = \varinjlim p^{-N} G_0$

À L/K près, $p^{-1}G_0 \in H^1_{et}(G_0, \Gamma)$ $\qquad \Gamma$ = groupe abstrait

Th (Huber) $\quad H^1_{ét}(Spa(R,R^+), \underset{\substack{\uparrow \\ \text{groupe ab. fini}}}{\Gamma}) \cong H^1_{ét}(Spec(R), \Gamma)$ $\square$

$\Longrightarrow p^{-1}G_0/G_0$ est représentable par un fini étale $\square$

Déf (Fargues) Un groupe analytique rigide $/K$ est un objet en groupes abéliens G dans la cat. des espaces rigides $/K$ tel que

- mult_p est finie surjective
- $\forall x \in \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pts de l'espace adique}}}{|G|}$, $\lim_n x^{p^n} = 0$ $\qquad$ (G vu comme espace adique)

La cat est notée BT^{an}/K.

Ex (1) $G \in BT/O_K \Rightarrow (G^{ad})_\eta \in BT^{an}/K$

(2) $G \in BT/K \Rightarrow G^{an} \in BT^{an}/K$ $\quad$ étale $/K$

(3) $(\mathbb{G}_a, +) = (\mathbb{A}^1, +)$

(4) $(\mathbb{B}^1, +)$, $(\mathring{\mathbb{B}}^1, +)$ ne sont pas des BT^{an}

Le but de l'exposé est d'obtenir une éq de cat :

$$\begin{tikzcd}
BT/\mathcal{O}_K \arrow[rr, "(-)^{ad}_{\eta}"] \arrow[d, dashed, "\exists"'] & & BT^{an}/K \arrow[d, phantom, "\wr\!\!|\!|"] \\
\left\{ \begin{array}{c} G \text{ sans} \\ \text{facteur } \widehat{\mathbb{G}}_a \end{array} \right\} \arrow[rru, hook, "\text{pleine}"] \arrow[d, phantom, "|\!|\wr"] & & \left\{ (W,\Lambda,f) \quad \begin{array}{l} W = K\text{-EV dim finie} \\ \Lambda = \mathbb{Z}_p\text{-mod libre de rang fini} \end{array} \quad f : W \to \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} K(-1) \right\} \\
\left\{ \begin{array}{c} (W,\Lambda,f) \\ \text{tq } f \text{ injectif} \end{array} \right\} \arrow[rru, hook, "\text{pleine}"] & &
\end{tikzcd}$$

si $K = \widehat{K}$

Bernard montrera que $\overset{\exists}{\dashrightarrow}$ est une éq. de catégories, dans son exposé à venir.

__Th__ Si $G \in BT^{an}/K$, alors G est lisse et il existe une suite exacte de faisceaux étales

$$0 \to \underset{\underset{BT/K}{\cap}}{G[p^\infty]} \to G \xrightarrow{\log} \underset{\underset{\mathbb{G}_a^d}{\wr|}}{\mathrm{Lie}\, G \otimes \mathbb{G}_a} \to 0$$

où $\mathrm{Lie}\, G = (e^* \Omega_G)^\vee$

De plus, log est étale et localement scindé

ie $\exists\, U \subset G$ ouvert, $\log_{|U} : U \cong \mathrm{Lie}\, G \otimes \mathbb{B}(0,\varepsilon)$.

__Dém__ : $\widehat{\mathcal{O}}_{G,0}$ groupe formel sur K.

$$\cong (K[\![X_1,\dots,X_d]\!], +)$$

On déduit que G est lisse au point $\underset{0_G}{\overset{\|}{0}}$. On a un morphisme

$$\underset{\mathrm{Lie}\, G \otimes \widehat{\mathbb{G}}_a \,\cong}{K[\![X_1,\dots,X_d]\!]} \xrightarrow{\log} \mathcal{O}_{G,0}$$
$$X_i \mapsto \int \omega_i \quad \text{tq } \int \omega_i(0) = 0.$$

Si on choisit une base de formes diff invariantes $\omega_1,\dots,\omega_d$

Soit $x \in G$ tq $k(x)/K$ est finie, i.e. un point de Tate.
Alors x agit par translations sur $G_{k(x)}$, envoyant 0 sur x. Donc $G_{k(x)}$ est lisse en x, donc G lisse partout.

ce qui est important ici c'est que G est un espace rigide et non pas un espace adique plus fancy.

Comme $k(0) = K$, il existe $0 \in \mathcal{U} \overset{\circ}{\subset} G$ tq $\mathcal{U} \simeq \mathbb{B}^d(0,1)$.
Donc la flèche log se relève en $\mathcal{U} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V} \subset \operatorname{Lie} G \otimes \mathbb{G}_a$

Ce n'est pas clair que log est un morphisme de groupes.
En effet, sur $\mathcal{U}$ on a deux multiplications :

$m_1 : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U} \subset G$ induite par $+$ et log

$m_2 : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to G$ induite par la mult de G.

Notons $\mathcal{Y} = \ker\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \hookrightarrow \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ (fermé Zariski)

Alors $\widehat{\mathcal{Y}}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}, 0\times 0} = \widehat{\mathcal{U}} \times \widehat{\mathcal{U}}$

Soit $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}$ l'idéal de $\mathcal{Y}$, on a donc obtenu $\widehat{\mathcal{I}}_{0\times 0} = 0$
Comme la complétion en 0 est fidèlement plate, on déduit $\mathcal{I}_{0\times 0} = 0$. Or $\mathcal{I}_{0\times 0} = \varinjlim \Gamma(V \times V, \mathcal{I})$
(les carrés $V \times V$ forment une base des voisinages de 0)

Alors $\mathcal{Y} \cap V \times V = V \times V$
donc $\log_{|V}$ est un morphisme de groupes pour un certain $V \overset{\circ}{\subset} G$.

Posons $\mathcal{U} = V$, on a :
(changement de notations)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow[\sim]{\log} & \operatorname{Lie} G \otimes \mathbb{B}^1(0,\varepsilon) \\ {\scriptstyle p^N}\uparrow & & \downarrow {\scriptstyle p^{-N}}\, \wr \\ p^{-N}\mathcal{U} & \longrightarrow & \operatorname{Lie} G \otimes \mathbb{B}^1(0, |p^{-N}|\varepsilon) \end{array}$$

Comme $G = \varinjlim p^{-N}\mathcal{U}$, alors

$\exists \log : G \to \operatorname{Lie} G \otimes \mathbb{G}_a$ | surjectif étale

Le fait qu'il soit étale découle du fait que $(\times p)$ est étale

Ceci se teste sur Lie :

$$\begin{array}{l} \operatorname{Lie}(\times p) = \operatorname{Lie}(\times p : \operatorname{Lie} \mathbb{G}_a^d \longrightarrow \operatorname{Lie}\mathbb{G}_a^d) \\ \quad \| \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow \text{isomorphisme} \\ (e^*\Omega_G)^\vee \end{array}$$

Ceci montre que $e^*\Omega_{(\times p)}$ est un iso,

donc $\pi^* e^* \Omega_{(\times p)} = \Omega_{(\times p)}$ isomorphisme, donc $\times p$ étale.

Enfin $\ker \log = \varinjlim_n \ker \times p^n = \Phi(G) = G[p^\infty]$.

$\uparrow$ notation de Tate.

<u>Rem</u> : $(G^{ad})_\eta(L) = G(L) := G^{form}(L^\circ)$

<u>Rem</u> : $\partial(\mathbb{G}_a) = \emptyset$

$\partial(\times p) = \emptyset$ car p fini

$\Rightarrow \partial G = \emptyset \Rightarrow \partial \log = \emptyset$.

<u>Rappel</u> sur le frontière (déf à la Huber)

$$\begin{array}{ccc} X = \operatorname{Spa}(R, R^+) & \overset{\circ}{\hookleftarrow} & \mathcal{U} = \operatorname{Spa}\left(R\langle f_i/g \rangle, R\langle f_i/g\rangle^+\right) \\ \downarrow & & \\ S = \operatorname{Spa}(A, A^+) & & \end{array}$$

« $\mathcal{U}$ est dans l'intérieur de X » relativement à S

On dit que $\mathcal{U} \subset\subset_S X$ ssi $\mathcal{U} \overset{\circ}{\subset} X$ factorise sur la compactification de $\mathcal{U}/S$, ie $\operatorname{Spa}\left(R\langle f_i/g\rangle, \overline{A^+ + R\langle f_i/g\rangle^{\circ\circ}}\right)$

$$\operatorname{Int}(X/S) = \bigcup_{\mathcal{U} \subset\subset_S X} \mathcal{U} \quad \text{et} \quad \partial(X/S) = X \setminus \operatorname{Int}(X/S).$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \overset{\circ}{\hookrightarrow} & \mathcal{U}_S^c \\ \downarrow & \swarrow & \\ S & & \end{array}$$

partiellement propre

Si $X \xrightarrow{f} Y \to S$ on a une formule de Berkovich :

$$\mathrm{Int}(X/S) = \mathrm{Int}(X/Y) \cap f^{-1}\,\mathrm{Int}(Y/S)$$

Alors $\mathrm{Int}(\times p) = G \Rightarrow \mathrm{Int}(G) = G \Rightarrow \mathrm{Int}(\log) = G$.

En particulier, si $G \in BT^{an}/K$ alors $\partial G = \emptyset$. Ceci montre que $\mathbb{B}(0,1)$ ne peut pas être un BT^{an}!

Cor : $BT/K \underset{\perp}{\rightleftarrows} BT^{an}/K$ couple d'adjoints.

$$\Gamma \longmapsto \Gamma^{an}$$
$$G[p^\infty] \longleftarrow G$$

gauche $\perp$ droite

et $BT^{an}/K \underset{\perp}{\rightleftarrows} \mathrm{EspVect}^{<\infty}/K$

$$V \otimes \mathbb{G}_a \longleftarrow V$$
$$G \longmapsto \mathrm{Lie}\, G$$

Ça vaut même si K n'est pas alg. clos.

Dém : $\mathrm{Hom}(\Gamma^{an}, \mathbb{G}_a) = 0$ $\boxtimes$

Déf (Fargues) Si $\Gamma \in BT/K$ et $X \in$ Esp.An./K, groupe.

on définit $\mathcal{E}xt^1_{l.s}(X,\Gamma) = \left\{ \begin{array}{l} \text{suites exactes} \\ 0 \to \Gamma \to G \to X \to 0 \\ \text{loc scindées} \end{array} \right\} \subset \mathcal{E}xt^1(X,\Gamma)$

$$= \varinjlim_{\emptyset \in \mathcal{U} \overset{\circ}{\subset} X} \ker\left(\mathcal{E}xt^1(X,\Gamma) \to \mathcal{E}xt^1(\mathcal{U},\Gamma)\right)$$

Thm Si $\mathcal{F} \in \mathcal{E}xt^1_{ls}(\mathbb{G}_a^d, \Gamma^{an})$ alors $\mathcal{F}$ est représenté par un $G \in BT^{an}/K$. On a de plus :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Gamma \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "f", "\wr"'] & \mathbb{G}_a^d \arrow[d, "\mathrm{Lie}(f)"] \\
0 \arrow[r] & G[p^\infty] \arrow[r] & G \arrow[r, "\log"'] & \mathrm{Lie}\, G \otimes \mathbb{G}_a
\end{tikzcd}$$

Dém : La suite étant loc. scindée,

$\mathcal{U} \simeq \mathbb{B}^1(0, \varepsilon)$

$p^{-N}\mathcal{U} \in H^1_{et}(\mathbb{B}^1, T'[p^N])$ est un élément représentable grâce au résultat de Huber.

Alors $\mathcal{F} \simeq G$ représentable par un espace fini étale sur $\mathbb{G}_a^d$

- p surjectif OK
- $\dim \times p^N = \emptyset$ OK
- $\times p$ fini ? Il suffit de montrer $\begin{cases} \text{quasi-fini} \\ \text{sans bord} \\ \text{quasi-compact} \end{cases}$

Alberto le montre au tableau mais je ne note plus. $\boxtimes$

Donc pour étudier BT^{an}/K, il suffit d'étudier

$\mathcal{E}xt^1_{ls}(\mathbb{G}_a^d, T^{an})$ avec $T \in BT/K$.

Thm ("Le cas particulier") (On utilise pour la $1^{ère}$ fois l'hyp $K = \widehat{K}$)

$\mathcal{E}xt^1_{ls}(\mathbb{G}_a, \mu_{p^\infty}) = K \cdot \widehat{\mathbb{G}}_m$ de dim 1,

via la suite exacte $0 \to \mu_{p^\infty} \to \widehat{\mathbb{G}}_m \xrightarrow{\log} \mathbb{G}_a \to 0$.

Preuve Soit $G \in \mathcal{E}xt^1_{ls}(\mathbb{G}_a, \mu_{p^\infty})$. Soit $\mathcal{U} \simeq \mathbb{B}^1(0, 1)$

On a des SE :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mu_{p^N} \arrow[r] & p^{-N}\mathcal{U} \arrow[r] & \mathbb{B}^1(0, p^N) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mu_{p^{N+1}} \arrow[r] \arrow[u, "\times p"] & p^{-(N+1)}\mathcal{U} \arrow[r] \arrow[u, "\times p"] & \mathbb{B}^1(0, p^{N+1}) \arrow[r] \arrow[u, "\times p", "\wr"'] & 0
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{B}^1(0, p^{N+1}) = \mathbb{B}^1$

Donc $p^{-N}\mathcal{U} \in \mathrm{Im}\left(\mathcal{E}xt^1(\mathbb{B}^1, \mu_{p^{N+1}}) \xrightarrow[\times p =: \alpha]{} \mathcal{E}xt^1(\mathbb{B}^1, \mu_{p^N})\right)$

La même suite avec $\widehat{\mathbb{G}}_m$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mu_{p^N} \arrow[r] & \widehat{\mathbb{G}}_m \arrow[r, "p^N"] & \widehat{\mathbb{G}}_m \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mu_{p^{N+1}} \arrow[r] \arrow[u, "\times p"] & \widehat{\mathbb{G}}_m \arrow[r, "p^{N+1}"] \arrow[u, "\times p"] & \widehat{\mathbb{G}}_m \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0
\end{tikzcd}$$

On a une suite exacte :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\mathbb{B}^1, \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(\mathbb{B}^1, \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{E}xt^1(\mathbb{B}^1, \mu_{p^{N+1}}) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & \mathcal{E}xt^1(\mathbb{B}^1, \mathbb{G}_m) \arrow[d, "\times p"] \\
\mathrm{Hom}(\mathbb{B}^1, \mathbb{G}_m) \arrow[r, "\times p"'] & \mathrm{Hom}(\mathbb{B}^1, \mathbb{G}_m) \arrow[r] & \mathcal{E}xt^1(\mathbb{B}^1, \mu_{p^N}) \arrow[r] & \mathcal{E}xt^1(\mathbb{B}^1, \mathbb{G}_m)
\end{tikzcd}$$

<u>Fait</u> : le morphisme vertical de droite est nul

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{B}^1, \mathbb{G}_m) \cong \mathring{\mathbb{B}}(0, p^{-\frac{1}{p-1}})$$
$$\exp(\xi \cdot) \mapsfrom \xi$$

Ainsi $p^{-N}\mathcal{U} \longleftrightarrow \xi \in \mathring{\mathbb{B}}^1(0, p^{-\frac{1}{p-1}})$

La compatibilité par rapport à N implique que

$$p^{-N}\mathcal{U} \longleftrightarrow \xi \in \mathring{\mathbb{B}}(0, p^{-\frac{1}{p-1}}) = \varprojlim (-)/p^n$$

En mettant tout ça ensemble on voit qu'on a un carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
p^{-N}\mathcal{U} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathbb{B}^1 \arrow[d, "\exp(\xi \cdot)"] \\
\mathbb{G}_m \arrow[r, "p^N"'] & \mathbb{G}_m
\end{tikzcd}$$

donc

$$\begin{tikzcd}
p^{-N}\mathcal{U} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathbb{B}(0, p^N) \arrow[d, "\times \xi"] \\
\mathbb{B}^1(1, |\xi|)^{\frac{1}{p^N}} \arrow[r, "\log"'] & \mathbb{B}(0, |\xi| p^N)
\end{tikzcd}$$

puis $\varinjlim_N p^{-N}\mathcal{U} = G \cong \widehat{\mathbb{G}}_m$ $\boxtimes$

<u>Cor</u> Si $G \in BT^{an}/K$ avec $K = \widehat{K}$ alors il existe $f : \mathrm{Lie}\, G \to T(G) \otimes K(-1)$ tq on ait un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & G[p^\infty] \arrow[r] \arrow[d, equal] & G \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathrm{Lie}\, G \otimes \mathbb{G}_a \arrow[d, "f"] \\
0 \arrow[r] & \mathbb{G}_m[p^\infty] \otimes TG \otimes K(-1) \arrow[r] & TG \otimes K(-1) \otimes \mathbb{G}_m \arrow[r] & TG \otimes K(-1) \otimes \mathbb{G}_a
\end{tikzcd}$$

où G est le produit fibré qu'on voit. $\boxtimes$

<u>Rem</u> Ça donne l'équivalence :

$$(W, \Lambda, f) \longmapsto (\Lambda \otimes \mathbb{G}_m) \underset{\Lambda \otimes \mathbb{G}_a, f}{\times} (W \otimes \mathbb{G}_a)$$

<u>Rem</u> : soit $W \xrightarrow{f} \Lambda \otimes K(-1)$ $\quad f_1 = \text{surj}, \; f_2 = \text{inj}.$

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_1"'] & & \Lambda \otimes K(-1) \\
& W' \arrow[ur, hook, "f_2"'] &
\end{tikzcd}$$

il lui correspond

$$\begin{tikzcd}
G(f) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & W \otimes \mathbb{G}_a \arrow[d] \\
G \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & W' \otimes \mathbb{G}_a \arrow[d] \\
\mathbb{G}_m^d \arrow[r] & \Lambda \otimes K(-1) \otimes \mathbb{G}_a
\end{tikzcd}$$

On obtient donc $G \cong G(f_2) \oplus \mathbb{G}_a^{\dim(W') - \dim(W)}$

Si $G(f_2) \hookleftarrow \mathbb{G}_a$ alors $\mathrm{Hom}(\mathbb{G}_a, \mathbb{B}^d) = 0$

Si $G \in BT/\mathcal{O}_K$ alors $(G^{ad})^\circ_\eta \cong \mathring{\mathbb{B}}^d$

<u>Rem</u> Se généralise à K quelconque, en :

$$BT^{an}/K \cong \left\{ (W, \Lambda, f) \text{ où } \Lambda \text{ est muni d'une action de Galois et } f \text{ est Galois-invariant} \right\}$$