Groupe de travail sur l'article *Moduli of p-divisible groups* de P. Scholze et J. Weinstein

Introduction

Matthieu Romagny, 13 janvier 2015

Je vais présenter 3 résultats de l'article, parler des dépendances entre eux, puis proposer un plan d'exposés pour le groupe de travail.

1 Pleine fidélité à isogénie près pour $\mathbb{D}$ sur les anneaux semiparfaits

1.1. Groupes p-divisibles. Soient S un schéma et G un groupe p-divisible, aussi appelé groupe de Barsotti-Tate (BT), sur S. C'est un faisceau fppf abélien qui est de p-torsion et tel que $p : G \to G$ est une isogénie, i.e. un épimorphisme fppf de noyau (représentable) fini localement libre. Le morphisme naturel $\varinjlim G[p^n] \longrightarrow G$ est alors un isomorphisme qui exprime G comme réunion, le long d'immersions fermées, de groupes finis localement libres. Pour tous $m, n \geqslant 1$ la multiplication par p^m induit des suites exactes $0 \to G[p^m] \to G[p^{m+n}] \to G[p^n] \to 0$ qui montrent qu'il existe un entier h appelé *hauteur* de G tel que le rang de $G[p^n]$ soit de la forme p^{nh}. Supposons maintenant que p est localement nilpotent sur S. Alors, selon Grothendieck et Messing, on associe à G l'*extension vectorielle universelle*

$$0 \longrightarrow \omega_{G^\vee} \longrightarrow E(G) \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

qui est universelle parmi les extensions de G par (le faisceau fppf associé à) des faisceaux quasi-cohérents. On montre par ailleurs que le voisinage infinitésimal de $E(G)$ le long de la section unité est un groupe formel, ce qui permet de définir son algèbre de Lie $D(G) = \mathrm{Lie}(E(G))$ comme étant celle du groupe formel associé.

1.2. Cristaux de Dieudonné. Notons maintenant $\Sigma = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$. Conservons l'hypothèse que p est localement nilpotent sur S, donc S est un Σ-schéma. On montre alors que $D(G)$ se « faisceautise » sur le site cristallin $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$ muni de la topologie fppf en un cristal de $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$-modules localement libres de rang fini noté $\mathbb{D}(G)$ et covariant en G. (Grossièrement, un *cristal* est un faisceau dont la formation est compatible au changement d'ouvert dans le site $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$.) Si $S_0 = V(p) \subset S$, la propriété de cristal implique qu'on a un isomorphisme $\mathbb{D}(G) \simeq \mathbb{D}(G_0)$. Compte tenu de ce fait, Frobenius $F : G_0 \to G_0^{(p)}$ et Verschiebung $V : G_0^{(p)} \to G_0$ induisent par fonctorialité des morphismes $F : \mathbb{D}(G) \to \mathbb{D}(G)^{(p)}$ et $V : \mathbb{D}(G)^{(p)} \to \mathbb{D}(G)$. Notant $\mathrm{Dieu}(S)$ la catégorie des cristaux de $\mathcal{O}_{S/\Sigma}$-modules localement libres de rang fini munis de F et V, on a obtenu un foncteur :

$$\mathbb{D} : \mathrm{BT}(S) \longrightarrow \mathrm{Dieu}(S).$$

1.3. Pleine fidélité. On a espoir (cf exposé de Grothendieck à l'ICM 1970) que le foncteur $\mathbb{D}$, ou sa variante à isogénie près $\mathbb{D} : \mathrm{BT}^{\mathrm{is}}(S) \to \mathrm{Dieu}^{\mathrm{is}}(S)$, soit pleinement fidèle. Pour S général, il n'est ni pleinement fidèle ni essentiellement surjectif. Cependant, on dispose de résultats de pleine fidélité, dûs notamment à Berthelot, Messing et de Jong (sur la période 1988-1999), pour certains S :

- $\mathbb{D}$ est pleinement fidèle sur $\mathrm{BT}(S)$ si S est localement d'intersection complète sur un corps de car. p, ou excellent à anneaux locaux d'intersection complète ;

- $\mathbb{D}$ est pleinement fidèle sur $\mathrm{BT}^{\mathrm{is}}(S)$ si S de type fini sur un corps de car. p, ou excellent local de car. p.

Les résultats de Scholze et Weinstein améliorent nos connaissances dans la direction des anneaux de base *semiparfaits* i.e. de caractéristique p à endomorphisme de Frobenius surjectif. Dans le cas $S = \mathrm{Spec}(R)$ avec R parfait, si l'on note $\Sigma_k = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})$, le site $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma_k)$ possède un objet terminal $S \hookrightarrow \mathrm{Spec}(W_k(\mathcal{O}_S))$. Un cristal est entièrement déterminé par sa valeur sur l'objet terminal, qui est un $W_k(R)$-module. En passant à la limite sur k on obtient une équivalence entre la catégorie des cristaux de Dieudonné et la catégorie des $W(R)$-modules finis projectifs munis de F et V, que l'on voit comme nouvelle catégorie des valeurs de $\mathbb{D}$. On peut maintenant donner le principal résultat disponible, dû à Berthelot (1980), Gabber (non publié) et Lau (2013) :

- $\mathbb{D}$ est une équivalence sur $\mathrm{BT}(S)$ si S est le spectre d'un anneau parfait.

Dans le cas semiparfait, dont $R = \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/(p)$ est un exemple, on obtient encore une description des cristaux en termes de modules en évaluant $\mathbb{D}$ sur $A_{\mathrm{cris}}(R) = (W(R^\flat)^{\mathrm{PD}(\ker\theta)})^\wedge$, le complété p-adique de l'enveloppe à puissances divisées selon l'idéal $\ker(\theta : W(R^\flat) \to R)$ de l'anneau des vecteurs de Witt de $R^\flat := \varprojlim R$, où la limite inverse indicée par $\mathbb{N}$ est prise selon Frobenius. Le premier théorème de Scholze et Weinstein s'applique aux anneaux f-semiparfaits, qui sont les anneaux semiparfaits pour lesquels $R^\flat$ est f-adique (par exemple les quotients d'un anneau parfait par un idéal de type fini).

Théorème. *Si R est f-semiparfait, le foncteur $\mathbb{D}$ est pleinement fidèle sur la catégorie des BT à isogénie près. Si R est quotient d'un anneau parfait par un idéal de type fini régulier, alors $\mathbb{D}$ est pleinement fidèle sur la catégorie des BT.*

Ce théorème sera appliqué avec $R = \mathcal{O}_C/(p)$ pour obtenir la classification qui fait l'objet de la section suivante.

2 Classification des BT sur $\mathcal{O}_C$, avec C corps complet alg. clos

Soit G un BT sur $\mathcal{O}_C$, où C est comme dans le titre. Soit $T = T(G) = \varprojlim G[p^n](\mathcal{O}_C)$ son module de Tate, qui est un $\mathbb{Z}_p$-module. On dispose d'un morphisme de groupes p-divisibles :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T & \longrightarrow & G \\ a \otimes b & \longmapsto & ab \end{array}$$

où, si $a \in \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z} = (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)[p^i]$, on a $ab = ab_i \in G[i]$. Noter que le produit tensoriel qui apparaît est un produit tensoriel de faisceaux de $\mathbb{Z}_p$-modules ; c'est un groupe p-divisible car T est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang fini. En dualisant on obtient un morphisme

$$G^\vee \longrightarrow \mu_{p^\infty} \otimes_{\mathbb{Z}_p} T^\vee$$

puis en prenant l'algèbre de Lie, un morphisme

$$\mathrm{Lie}(G^\vee) \longrightarrow T^\vee \otimes \mathcal{O}_C.$$

Enfin en dualisant de nouveau, on trouve un morphisme :

$$\alpha_G : T \otimes \mathcal{O}_C \longrightarrow \mathrm{Lie}(G^\vee)^\vee.$$

Puisque $T(G^\vee) = (TG)^\vee(1)$ (la mise en dualité étant faite par l'accouplement $T(G) \otimes T(G^\vee) \to T\mu_{p^\infty}$), on peut dualiser le morphisme $\alpha_{G^\vee}$ pour obtenir la *suite de Hodge-Tate* qui est exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Lie}(G)(1) \longrightarrow T(G) \otimes \mathcal{O}_C \longrightarrow \mathrm{Lie}(G^\vee)^\vee \longrightarrow 1.$$

Tensorisant par C on voit que $W := \mathrm{Lie}(G) \otimes C$ est un sous-espace de $T(G) \otimes C(-1)$. Le second théorème de Scholze et Weinstein s'énonce ainsi.

Théorème. *Le foncteur $G \mapsto (T, W)$ établit une équivalence de catégories entre* $\mathrm{BT}(\mathcal{O}_C)$ *et la catégorie des paires (T, W) où T est un $\mathbb{Z}_p$-module de rang fini et W est un sous-espace de $T \otimes C(-1)$.*

Ce théorème est de nature différente des résultats des théories de Dieudonné : ici les BT sont classifiés par leur cohomologie *étale* (par opposition à la cohomologie *cristalline* côté Dieudonné), et aucun objet *semi*-linéaire n'intervient.

3 Image du morphisme des périodes des espaces de Rapoport-Zink

On fixe maintenant un corps k parfait de car. p et $H \in \mathrm{BT}(k)$ et on note $W = W(k)$.

3.1. Espaces de Rapoport-Zink. Ces espaces classifient les *déformations* de H en un sens particulier que nous devons expliquer. Pour $G, H \in \mathrm{BT}(S)$ on appelle *quasi-isogénie* de G vers H une section globale ρ du faisceau $\mathrm{Hom}_S(G, H) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ telle que localement sur S le morphisme $p^n\rho$ est une isogénie, pour un certain n. Cette définition est justifiée par le théorème de Grothendieck qui dit que si $S \hookrightarrow S'$ est une immersion fermée à noyau localement nilpotent et si $G, H \in \mathrm{BT}(S')$, alors toute isogénie peut être relevée *après multiplication par p^n pour un certain n*. Plus précisément, le théorème de *rigidité des quasi-isogénies* affirme que l'application $\mathrm{Qisog}_{S'}(G, H) \to \mathrm{Qisog}_S(G, H)$ est une bijection).

Revenons à $H \in \mathrm{BT}(k)$. Soit Nilp_W la catégorie des W-algèbres sur lesquelles p est localement nilpotent. Une *déformation* de H à $R \in \mathrm{Nilp}_W$ est une paire (G, ρ) où $G \in \mathrm{BT}(R)$ et

$$\rho : H \otimes_k R/p \to G \otimes_R R/p$$

est une quasi-isogénie. On dit que (G_1, ρ_1) est isomorphe à (G_2, ρ_2) si $\rho_2\rho_1^{-1}$ provient d'un isomorphisme $i : G_1 \to G_2$. Rapport et Zink ont montré que le foncteur $\mathcal{M} : \mathrm{Nilp}_W \to \mathrm{Ens}$ dont les R-points sont les classes d'isomorphisme de déformations de H à R est représentable par un $\mathrm{Spf}(W)$-schéma formel localement de type fini. Les espaces de Rapoport-Zink tels que $\mathcal{M}$ sont utiles pour étudier les groupes p-divisibles eux-mêmes, mais aussi pour produire des représentations de certaines groupes linéaires p-adiques et pour uniformiser p-adiquement les variétés de Shimura.

3.2. Morphisme de périodes. Notons $\mathscr{F}\!\ell$ la grassmanienne des quotients de dimension $d = \dim(G)$ de l'isocristal $\mathbb{D}(H)[1/p]$ de H, de dimension $h = \mathrm{ht}(G)$. Partons d'un point de $\mathcal{M}$ à valeurs dans une W-algèbre complète p-adique R, classe d'isomorphisme d'un (G, ρ). Passant à la limite à partir des quotients finis R/p^n et utilisant la suite exacte

$$0 \longrightarrow \omega_{G^\vee} \longrightarrow D(G) \longrightarrow \mathrm{Lie}(G) \longrightarrow 0.$$

obtenue par passage aux algèbres de Lie dans la suite exacte de l'extension vectorielle universelle, la quasi-isogénie ρ induit une surjection de $R[1/p]$-modules projectifs finis $\mathbb{D}(H) \otimes R[1/p] \to \mathrm{Lie}(G)[1/p]$. On obtient ainsi un morphisme

$$\pi : \mathcal{M}_\eta^{\mathrm{ad}} \longrightarrow \mathscr{F}\!\ell$$

de la fibre générique de $\mathcal{M}$ vers la grassmannienne, appelé *morphisme des périodes* de $\mathcal{M}$. On sait que π est étale. Scholze et Weinstein utilisent leur théorème A et la courbe de Fargues-Fontaine X pour décrire les points de l'image de π, retrouvant un résultat prouvé par Faltings, comme suit. On sait par

Fargues-Fontaine qu'il y a correspondance entre isocristaux sur k (ou classes d'isogénie de groupes p-divisibles sur k) et fibrés vectoriels sur X à pentes entre 0 et 1. Notons $i_\infty : \{\infty\} \hookrightarrow X$ l'inclusion du point C-rationnel correspondant au morphisme $\theta : B^+_{\mathrm{cris}} \to C$. Soit $\mathscr{E}$ le fibré correspondant à H. Si C est complet algébriquement clos, tout $(C, \mathcal{O}_C)$-point $x \in \mathscr{F}\ell$ détermine un quotient $\mathbb{D}(H) \otimes C \to W$ et une modification de $\mathscr{E}$:

$$0 \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow i_{\infty,*}W \longrightarrow 0.$$

Le troisième théorème de Scholze et Weinstein s'énonce ainsi.

Théorème. *Le point $x \in \mathscr{F}\ell(C, \mathcal{O}_C)$ est dans l'image de π si et seulement si $\mathscr{F}$ est trivial, i.e. $\mathscr{F} \simeq \mathcal{O}_X^h$.*

Nous proposons le plan d'exposés suivant :

0. Introduction
1. Groupes p-divisibles d'après Grothendieck-Messing (2 séances)
2. Pleine fidélité de $\mathbb{D}$ sur les anneaux semiparfaits (2 séances)
3. Domaines de périodes en géométrie complexe
4. Courbe de Fargues-Fontaine
5. Groupes analytiques rigides p-divisibles d'après Fargues
6. Classification des groupes p-divisibles sur $\mathcal{O}_C$
7. Espaces de Rapoport-Zink et morphisme de périodes
8. Image du morphisme de périodes