Domaines de périodes

Chr. Mourougane
10 mars 2015

Réf : Griffiths - Schmid, Results and perspective in Hodge theory

Morisson On Clemens - Schmid sequence

Voisin Théorie de Hodge.

I. Structures de Hodge polarisées

Déf Une structure de Hodge (entière) de poids $m \in \mathbb{N}^*$ est la donnée d'un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini $H_{\mathbb{Z}}$ et d'une filtration décroissante F^p du complexifié $H_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$: $H_{\mathbb{C}} \supset \dots \supset F^{p-1} \supset F^p \supset F^{p+1} \supset \dots$

satisfaisant $H_{\mathbb{C}} = F^p \oplus \overline{F^{m-p+1}}$ pour tout p,

où $\bar{\cdot}$ est la conjugaison complexe sur $H_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$.

Rem : "libre" n'est pas important pour la déf.

On pose alors $H^{pq} = F^p \cap \overline{F^q}$ de sorte que $F^p = \bigoplus_{a \geq p} H^{a,m-a}$

Déf : Une polarisation sur $(H_{\mathbb{Z}}, F^p)$ est la donnée d'une forme bilinéaire Q sur $H_{\mathbb{Z}}$, symétrique si m est pair et antisymétrique sinon, telle que :

$(\check{C}) = (i)$ $\forall p$, $Q(F^p, F^{m-p+1}) = 0$

$(C) = (ii)$ $\forall v \neq 0$, $Q(Cv, v) > 0$ où C est défini par

| $Cv = (\sqrt{-1})^p\, (\sqrt{-1})^q\, v$ pour $v \in H^{pq}$
| étendu par $\mathbb{Z}$-linéarité

Exemple fondamental

Si X est une var complexe proj. lisse de dim n,
et si $m \leq n$, alors $H_{\mathbb{Z}} = H^m_{prim}(X, \mathbb{Z}) / \text{torsion}$

où on voit X plongée dans $\mathbb{P}^N$
et H^m_{prim} est la partie primitive de la cohom. singulière
définie par :

$$H^m_{prim}(X, \mathbb{Z}) = \ker\left(c_1(\mathcal{O}(1))^{\cup(n-m+1)} : H^m(X, \mathbb{Z}) \to H^{2n-m+2}(X, \mathbb{Z})\right)$$

Pour $\alpha, \beta \in H_{\mathbb{Z}}$ la polarisation est déf. par :

$$Q(\alpha, \beta) = \int_X c_1(\mathcal{O}(1))^{\cup(n-m)} \cup \alpha \cup \beta .$$

La filtration est donnée par :

$F^p H^m_{prim}(X, \mathbb{C}) \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} \text{via l'isomorphisme} \\ \text{de de Rham} \end{pmatrix}$ l'espace engendré
par les classes de m- formes d- fermées de type (a, b) avec $a \geq p$.

Rem : on pourrait ne pas se restreindre à la partie primitive de la cohom. mais les relations $(\check{c})$ et (c) de la déf de polarisation ne seraient plus vérifiées.

Autres exemple / cas particuliers :

* Si X est une courbe proj. lisse :

$$H^1(X, \mathbb{C}) = H^{10} \oplus H^{01} \quad \text{et} \quad H^{01} = \overline{H^{10}}$$

* Si X est une var. de dim 3 sans 3-forme holomorphe
(ex 1) $X \subset \mathbb{P}^4$ de degré 3 ou 4 ; X est de Fano)
avec $K_X < 0$
2) $X = Q \cap Q' \subset \mathbb{P}^5$

dans ce cas,

$$H^3(X,\mathbb{C}) = H^{21} \oplus H^{12} \quad \text{et} \quad H^{12} = \overline{H^{21}}.$$

Théo (Clemens. Griffiths) Une hypersurface cubique de $\mathbb{P}^4$ est caractérisée par sa structure de Hodge polarisée de poids 3

C'est un analogue du th. de Torelli.

* Si X est une surface K3 (ie $K_X = \mathcal{O}_X$, $\pi_1(X) = 1$).
(ex $X \subset \mathbb{P}^3$ quartique)
$H^2_{prim}(X,\mathbb{C}) = c_1(\mathcal{O}(1))^{\perp_Q}$, orth. pour la forme d'intersection

$$H^2_{prim}(X,\mathbb{C}) = \underbrace{H^{20}}_{\text{de dim } 1} \oplus H^{11} \oplus H^{02} \quad \text{et} \quad H^{02} = \overline{H^{20}}$$
$$H^{11} = (H^{02} \oplus H^{02})^{\perp_Q}$$

* Si X est une hypersurface cubique de $\mathbb{P}^5$. Elle est de Fano et

$$H^4_{prim}(X,\mathbb{C}) = \underbrace{H^{31}}_{\text{de dim } 1} \oplus H^{22} \oplus H^{13}$$

Théo Dans ces deux derniers cas, la structure de Hodge polarisée caractérise la variété. On peut décrire l'ensemble des structures de Hodge ainsi réalisées. Dit autrement, l'application des périodes est injective et on connait son image.

II. Structures de Hodge mixtes

Déf une structure de Hodge mixte (entière) est la donnée d'un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini $H_{\mathbb{Z}}$, ainsi que d'une filtration croissante définie sur $\mathbb{Q}$

de $H_{\mathbb{C}}$: $H_{\mathbb{C}} \supset \cdots \supset W_{m+1} \supset W_m \supset W_{m-1} \supset \cdots$
(dite filtration par le poids), et
d'une filtration décroissante de $H_{\mathbb{C}}$: $\cdots \supset F^{p-1} \supset F^p \supset F^{p+1} \supset \cdots$
(dite filtration de Hodge)
tels que les filtrations $F^p Gr_m^W = \dfrac{F^p \cap W_m}{F^p \cap W_{m-1}}$
sur $Gr_m^W = \dfrac{W_m}{W_{m-1}}$ soit de Hodge de poids m.

<u>Rem</u>: (W_m) provient bien d'une filtration sur $H_{\mathbb{Q}}$ mais on note W_m le sous-espace de $H_{\mathbb{C}}$.

<u>Exemple</u> si X est projective complexe à croisements normaux simples (ie les comp. irréd D_i de X sont lisses et leurs $\cap$ sont transverses). On a un complexe double:

$$D^{[s]} := \coprod_{|I|=s} D_I$$

espace des formes diff. C^∞ de degré r

$$\begin{array}{ccc} A^{rs} := A^r(D^{[s]}) & \xrightarrow{d} & A^{r+1}(D^{[s]}) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle \delta = \mathrm{res.}} & & \\ A^r(D^{[s+1]}) & & \end{array}$$

Il y a une suite spectrale avec $E_1^{rs} = H^r_{dR}(D^{[s]}) \xrightarrow{d_1 = \delta}$

$$E_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dégénérescence}}}{=} E_\infty = H^*(A^{**}, d+\delta) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{de Rham}}}{=} H^*(X, \mathbb{C})$$

$$\left.\begin{array}{l} W_m = \bigoplus_{r \leq m} A^{rs} \\ F^p = \bigoplus_{r,s} F^p A^{rs} \end{array}\right)$$ donnent une structure de Hodge mixte sur $H^*(X, \mathbb{Z})$.

III. Variations de structure de Hodge (cas géométrique)

Soient X et S deux var. complexes lisses irréductibles

Soit $\pi : X \to S$ projectif lisse ($\exists \mathcal{L}$ rel. ample)

$R^m_{prim}\pi_* \mathbb{C}$ est le faisceau des sections plates d'un fibré vectoriel holomorphe $\mathbb{H}^m$ muni d'une connexion plate ∇ dite de Gauss-Manin.

Chaque fibre de $\mathbb{H}^m$ est la cohomologie (primitive) d'une var. proj lisse X_s, et admet donc une structure de Hodge polarisée F^p_s.

<u>Théo</u> (Griffiths)

(i) Les F^p_s forment un sous-fibré vectoriel holomorphe de $\mathbb{H}^m$

(ii) (Transversalité) $\nabla \mathcal{O}(F^p) \subset \mathcal{O}(T^*S \otimes F^{p-1})$

($\mathcal{O}$ désigne le faisceau des sections d'un fibré)

<u>Rem</u> on devrait plutôt appeler cela "horizontalité" que "transversalité"

Quitte à restreindre (provisoirement) S, on suppose qu'elle est contractile. Par le th d'Ehresmann

$$H^m(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{res_s} H^m(X_s, \mathbb{Z}) \quad \text{est un isomorphisme.}$$

En première approximation, l'application des périodes est la suivante :

$$\begin{aligned} \wp^{p m} : S &\longrightarrow \mathrm{Grass}(f_p, H^m(X, \mathbb{C})) \\ s &\longmapsto F^p H^m(X_s, \mathbb{C}) \subset H^m(X_s, \mathbb{C}) \simeq H^m(X, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

<u>théo</u> (i) $\wp^{pm}$ est holomorphe

(ii) $d\wp^{pm}_s : T_s S \longrightarrow T_{F^p_s} \mathrm{Grass} = \mathrm{Hom}(F^p, H^m/F^p)$

a son image dans le sous-espace

$$\mathrm{Hom}\left(F^p H^m(X_s, \mathbb{C}), F^{p-1}/F^p\right)$$

appelé le sous-espace horizontal.

L'application $d\wp^{pm}_s$ est donnée par le cup-produit par l'application de Kodaira-Spencer $T_s S \to H^{01}(X_s, TX_s)$.

(le 17 mars 2015)

Les applications de périodes plus générales sont à valeurs dans des variétés de drapeaux.

La condition de polarisation : $(\check{c})$ $Q(F^p, F^{m-p+1}) = 0$ définit un fermé $\check{D}$ de la var. de drapeaux, et la condition (c) $Q(Cv, \bar{v}) > 0$ définit un ouvert D de $\check{D}$, appelé domaine de périodes.

Les fibrés de Hodge $\mathbb{F}^p$ sur le domaine de périodes sont les recollements (si S est générale) des images réciproques par $\wp^{pm}$ des fibrés tautologiques sur les var. de drapeaux.

On les retrouve par :

$$\mathbb{F}^p \mathbb{H}^m = R^m \pi_* \left(\Omega^{\cdot \geq p}_{X/S}\right)$$

$$\mathbb{H}^{pq} = \mathbb{F}^p / \mathbb{F}^{p+1}$$

$$\mathbb{H}^m \overset{C^\infty}{\simeq} \bigoplus_{p+q=m} \mathbb{H}^{pq}$$

$$\mathbb{H}^{qp} \simeq \overline{\mathbb{H}^{pq}}$$

Passons aux dégénérescences.

Si $S = \Delta^*$ le disque épointé, on passe au revêtement universel $\mathbb{H} = \widetilde{\Delta^*}$ (demi-plan de Poincaré) pour se ramener à une base contractile. (En fait on va le noter $\widetilde{\Delta^*}$ plutôt que $\mathbb{H}$: il y a déjà trop de $\mathbb{H}$!).

$$\begin{tikzcd} z \arrow[d, mapsto] & \widetilde{\Delta^*} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\rho"'] & D \\ \exp(2i\pi z) & \Delta^* & \end{tikzcd} \quad \text{associée à} \quad \begin{tikzcd} \rho^* X \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\Delta^*} \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\pi"] & \Delta^* \end{tikzcd}$$

$\rho^* \mathbb{H}^m$ est trivialisable car $\mathbb{H}^m \to \Delta^*$ est un fibré plat ($\mathbb{H}^m = R^m \pi_*(\mathbb{C})$).

$\rho^* \mathbb{H}^m \simeq \widetilde{\Delta^*} \times H$ d'où une représentation de monodromie :

$$r : \pi_1(\Delta^*) = \mathbb{Z} \longrightarrow GL(H)$$

Comme $\mathbb{H}^m$ a une structure entière et une polarisation, r est à valeurs dans $\Gamma = G_{\mathbb{Z}} = \{ T \in GL(H) \cap O(Q),\ T H_{\mathbb{Z}} \subset H_{\mathbb{Z}} \}$.

lorsque la monodromie agit, si on fait un tour autour de l'origine de Δ dans Δ^*, on a

$$F(z+1) = T\, F(z), \quad \text{pour un } T \in \Gamma.$$

On peut donc compléter le diagramme ci-dessus :

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\Delta^*} \arrow[r, "F"] \arrow[d] & D \arrow[d] \\ \Delta^* \arrow[r, "f"'] & \Gamma \backslash D \end{tikzcd}$$

↑ application des périodes

IV. Description abstraite des domaines de périodes

Soit $(H_{\mathbb{Z}}, Q)$ fixé et $\{F_0^p\}$ une structure de Hodge sur $H_{\mathbb{Z}}$ polarisée par Q. Le groupe

$G_{\mathbb{C}} := O(H_{\mathbb{C}}, Q)$ agit transitivement sur $\check{D}$.

Notant $B_{\mathbb{C}} = \{T \in G_{\mathbb{C}} ; \forall p, TF_0^p \subset F_0^p\}$ on a :

$$\check{D} = G_{\mathbb{C}} / B_{\mathbb{C}}.$$

Soit $G_{\mathbb{R}} = \{T \in G_{\mathbb{C}}, TH_{\mathbb{R}} \subset H_{\mathbb{R}}\}$, agit transitivement sur D, alors les éléments de $B_{\mathbb{R}} := G_{\mathbb{R}} \cap B_{\mathbb{C}}$ commutent avec la conjugaison

fixent F_0^p, et $H_0^{pq} = F_0^p \cap \overline{F_0^q}$

fixent C_0, pour lequel $Q(C_0 \cdot, \bar{\cdot})$ hermitienne définie positive

Donc $B_{\mathbb{R}}$ est un groupe compact et $D = G_{\mathbb{R}} / B_{\mathbb{R}}$

Alors $\Gamma = G_{\mathbb{Z}}$ est un sous groupe discret de $G_{\mathbb{R}}$ qui agit proprement discontinûment sur D.

<u>Théorème</u>: Soit D un domaine de périodes classifiant des structures de Hodge. Alors, il existe une métrique hermitienne sur D $G_{\mathbb{R}}$-invariante, dont les courbures sectionnelles holomorphes dans les directions horizontales sont uniformément majorées par une constante strictement négative.

Ce th permet par ex. de montrer que l'opérateur de monodromie $T \in \Gamma$ (cas où $S = \Delta^*$) est quasi-unipotent (i.e. $\exists r$ tel que $T^r - I$ est nilpotent).

Revenons à $X \to \Delta^*$. Quitte à passer à un revêtement fini, on peut supposer que l'opérateur de monodromie T est unipotent. Alors

$$N = \log T = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} \frac{(T-I)^k}{k} \quad \text{est bien défini.}$$

On définit

$$G(z) = \exp(-zN)\, F(z) \in \check{D},$$

qui vérifie $G(z+1) = G(z)$. On a le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \tilde{\Delta}^* \arrow[r, "G"] \arrow[d] & \check{D} \\ \Delta^* \arrow[ur, "g^*"'] & \end{tikzcd}$$

où g^* est horizontale.

<u>Théorème de l'orbite nilpotente</u> (Schmid)

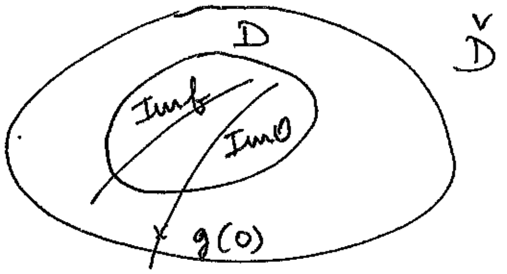
(i) g^* se prolonge en $g : \Delta \longrightarrow \check{D}$ holomorphe.

(ii) $z \mapsto \mathcal{O}(z) = \exp(zN)\, g(0)$ vérifie, comme $f : \Delta^* \to D$:

$$\mathcal{O}(z+1) = T\, \mathcal{O}(z)$$

$\mathcal{O}$ est horizontale

et $\mathcal{O}$ est asymptotique à f quand $\operatorname{Im} z \longrightarrow +\infty$
(ie $\exp(2i\pi z) \longrightarrow 0$)



- $g(0) \in \check{D}$ correspond à une filtration de Hodge de $H^*(X_s, \mathbb{C})$
- $N : H^*(X_s, \mathbb{C}) \longrightarrow H^*(X_s, \mathbb{C})$ est nilpotent. Il lui correspond une filtration croissante (qui raffine la filtration par les noyaux $\ker N^s$)

- Ces deux filtrations se combinent en une structure de Hodge mixte sur $H^*(X_s, \mathbb{C})$ appelée structure de Hodge limite.

Théorème des cycles invariants (une partie de la suite exacte de Clemens. Schmid)

On suppose que $X \to \Delta$ est une famille semi-stable, (dégénérescence) i.e. projectif, lisse au-dessus de Δ^*, et la fibre en 0 est un DCN stricts X_0. Alors

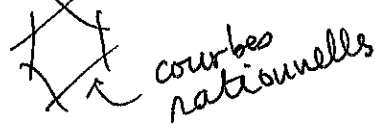
$$\begin{array}{ccccc} H^m(X,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{rs} & H^m(X_s,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{N} & H^m(X_s,\mathbb{Z}) \\ \wr\!\!\mid \ X \text{ se rétracte sur } X_0 & & \uparrow & & \\ H^m(X_0,\mathbb{Z}) & & \text{avec la structure de Hodge limite} & & \end{array}$$

$\uparrow$ avec la structure de Hodge décrite en II.

est une suite exacte de structures de Hodge mixtes.

Ex 1:
Si $X \to \Delta$ est une dégénérescence semi-stable de courbes elliptiques alors

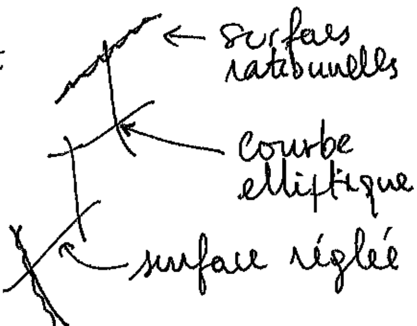
1) la fibre spéciale est lisse $\iff N F^1_{lim} = 0$

2) la fibre spéciale est un polygone de Néron 

$\iff \begin{cases} N F^1_{lim} \neq 0 \\ N^2 F^1_{lim} = 0 \end{cases}$

Ex 2: Si $X \to \Delta$ est un modèle de Kulikov (un certain type de modèle semi. stable de surfaces K3) alors

1) la fibre spéciale est lisse $\iff N F^2_{lim} = 0$

2) —— " —— est 

$\iff \begin{cases} N F^2_{lim} \neq 0 \\ N^2 F^2_{lim} = 0. \end{cases}$

3) —— " —— est une configuration de surfaces rationnelles de graphe dual homéomorphe à S^2 $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} N^2 F^2_{lim} \neq 0 \\ N^3 F^2_{lim} \neq 0 \end{cases}$

En dim. plus grande, il ne suffit pas de connaître la str. de Hodge limite pour décrire la fibre limite.