3/3/15 Vincent : Pleine fidélité du foncteur de Dieudonné : cas général

Anneau f-semi-parfait :

$$M : BT/R \longrightarrow \mathrm{Dieu}(R)$$

est pleint fidèle — $\hookrightarrow A_{cris}(R)$-module proj de tf + action de φ, V.

On a montré :

$$\mathrm{Hom}_{BT/R}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \mu_{p^\infty}) \underset{(*)}{\overset{M}{\simeq}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Dieu}(R)}(\quad)$$

$$M(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = A_{cris}(R).e \ , \ \varphi(e) = pe$$

$$M(\mu_{p^\infty}) = A_{cris}(R).e \ , \ \varphi(e) = e$$

. But : déduire de $(*)$ la pleine fidélité dans le C.G.

Source : O. Brinon : groupes p divisibles sur les anneaux semi-parfaits

I) Préambule

$G \in BT/R$: on va utiliser

$$A_G = \varinjlim_{\times p} A_{G[p^n]}$$: c'est une algèbre de Hopf qui représente $T(G) = \varprojlim G[p^n]$

$$A'_G := \varprojlim A_{G[p^n]}$$ anneau topologique complet

On a $A_{G^\vee} = (A'_G)^* = \mathrm{Hom}_{cont}(A'_G, R)$

Rq $\psi\ G \longrightarrow H$ morphisme de BT : induit $\psi' : A'_H \longrightarrow A'_G$

$\psi^\ast : A_H \longrightarrow A_G$

Idée de la preuve : travailler sur $S := A_G \otimes A_{H^\vee}$

- il est f-semi-parfait
- on a des morphismes universels sur S :

$$\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to G$$

$$H \longrightarrow \mu_{p^\infty}$$

$$S = A_G \otimes A_H^{\prime *} = \mathrm{Hom}_{\substack{R\text{-lin}\\ \text{cont}}}(A'_H, A_G)$$

$$\begin{array}{c} \cup \\ \mathrm{Hom}_{R\text{-Hopf}}(\quad\quad) \\ \big\downarrow \\ \mathrm{Hom}_{BT/R}(G, H) \end{array}$$

2) Un peu de modules de Tate

G un BT/R : on a une suite exacte

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & T(G) \arrow[r] & \widetilde{G} \arrow[r] & G \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & T(G) \arrow[r] \arrow[u, equal] & \widetilde{G} \times_G \widehat{G} \arrow[r] \arrow[u] & \widehat{G} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

d'où

$$\begin{tikzcd} T(G) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \widetilde{G} \times_G \widehat{G} \arrow[d] \\ \{0\} \arrow[r, hook] & \widehat{G} \end{tikzcd}$$

(objets ~~=~~ faisceaux fppf abéliens sur Nil_p^{op})

R-algèbres où p est nilpotent

(automatique, mais bon...)

Fait : (i) $\widetilde{G} \times_G \widehat{G}$ est représentable par $\widetilde{S}$

donc $T(G)$ est repr. par $\widetilde{S}/I = S$

(ii) le frobenius relatif $R_\varphi \otimes_S \hat{S} \to \bar{S}$ est un isom. Puisque R est f-semi-parfait, $\bar{S}$ (donc S) aussi.

→ on a montré que $T(G)$ est représentable par une R-algèbre S f-semi-parfaite

. Si A est une R-algèbre,

$$T(G)(A) = \mathrm{Hom}_{R\text{-alg}}(S, A)$$
$$\begin{array}{c} \wr\wr \\ \varprojlim G_{[p^n]}(A) \\ \shortparallel \\ \mathrm{Hom}_{BT/A}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, G_A) \end{array}$$

en particulier $\mathrm{Id}_S \in T(G)(S)$

fournit un morphisme universel $\lambda_{G,S} \in \mathrm{Hom}_{BT/S}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, G_S)$

Rque Si on ~~applique ça à $A_{G\times H^\vee}$~~ remonte à $A_{G\times H^\vee}$?, on a un morphisme universel

?

$$\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow G \times H^\vee \text{ au-dessus de } S = A_{G\times H^\vee} = A_G \otimes A_{H^\vee}$$

d'où $\lambda_{G,S} : \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow G_S$

$$\mu_{H,S} : H_S \longrightarrow \mu_{p^\infty, S}$$

II) Construction de la preuve

On fixe $G, H \in BT(R)$

On va construire $\psi : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Dieu}(R)}(M(G), M(H))_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{Hom}_{BT(R)}(G,H)_{\mathbb{Q}}$

inverse à gauche de $M(\ )_{\mathbb{Q}}$

(+ injectivité)

Soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Dieu}(R)}(M(G), M(H))$

On remonte à S :

$$\begin{tikzcd}
 & M(G) \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M(H) \arrow[d] & \\
M(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)_{A_{cris}(S)} \arrow[r, "M(\lambda_{G,S})"] \arrow[rrr, bend right, "\beta_f"'] & M(G)_{A_{cris}(S)} \arrow[r, "f_S"] & M(H)_{A_{cris}(S)} \arrow[r, "M(\mu_{H,S})"] & M(\mu_{p^\infty})_{A_{cris}(S)}
\end{tikzcd}$$

d'où (en appliquant le cas $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mu_{p^\infty}$)

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Dieu}(R)}(M(G), M(H))_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{BT/S}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \mu_\infty)_{\mathbb{Q}}$$
$$f \longmapsto \eta_f$$

2) Quelques identifications

On note $\mathbb{Q}_p(1)(A) = \{ (s_n) \in A^{\mathbb{Z}} : s_n = 1 \text{ si } n \leq 0, \; s_{n+1}^p = s_n \}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{BT/R}(G,H)_{\mathbb{Q}} &= \mathbb{Q}_p(1)\left(\varinjlim_m \mathrm{Hom}_{Gr/R}(G[p^m], H[p^m]) \right) \\
&= \mathbb{Q}_p(1)\left(\varinjlim \mathrm{Hom}_{R\text{-Hopf}}(A_{H[p^m]}, A_{G[p^m]}) \right) \\
&\simeq \mathbb{Q}_p(1)\left(\mathrm{Hom}_{R\text{-Hopf}}^{\text{cont}}(A'_H, A_G) \right)
\end{aligned}$$

(vérifier : ça marche parce que c'est $\mathbb{Q}_p(1)$)

$$\subset \mathbb{Q}_p(1)\left(\mathrm{Hom}_{R\text{-lin}}^{\text{cont}}(A'_H, A_G) \right)$$

Si $A'^{*}_H = \mathrm{Hom}_{R\text{-lin cont}}(A'_H, R)$ on trouve :

$$\mathrm{Hom}_{BT/R}(G,H)_{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{Q}_p(1)\left(A_G \otimes A'^{*}_H\right) = \mathbb{Q}_p(1)(S)$$

$$= \mathrm{Hom}_{BT/S}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \mu_{p^\infty})$$

[qui doit être la même chose que

$$\mathrm{Hom}(G,H)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Hom}(G_S, H_S)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\text{comp. avec } \lambda \text{ et } \mu} \mathrm{Hom}_S(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \mu_{p^\infty})_{\mathbb{Q}} \,]$$

<u>3) Suite</u>

On a construit :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Dieu}}(M(G), M(H))_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Gr/S}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \mu_{p^\infty}) \simeq \mathbb{Q}_p(1)\left(\mathrm{Hom}_{R\text{-lin cont}}(A'_H, A_G)\right)$$

$$f \longmapsto \eta_f = (\eta_{f,n})_{n\in\mathbb{Z}}$$

<u>Prop</u> Les $\eta_{f,n}$ sont des morphismes d'algèbres de Hopf.

(preuve + loin)

Cette prop. fournit

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Dieu}(R)}(M(G), M(H))_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}_{BT/R}(G,H)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Q}_p(1)\left(\mathrm{Hom}_{R\text{-Hopf}}(A'_H, A_G)\right)$$

$$f \longmapsto \varphi_f \longleftrightarrow (\eta_{f,n})$$

<u>Prop2</u> φ est un inverse à gauche de $M_{\mathbb{Q}}$

(c'est la même chose que —)

<u>Prop3</u> φ est injective

<u>Rem</u> Il montre que : si $\eta_f = 0$ alors f est de p-torsion dans $\mathrm{Hom}(M(G), M(H))$ donc nul après $\otimes\mathbb{Q}$.

(point clé : $^{\gamma}L_G \in \mathrm{Hom}(A_{cris}(S)^*, M(G))$ l'él^t naturel est tué par p^2)

III) Travail sur les ~~...~~ $r_{f,n}$

<u>Lemme (4.4.4)</u> $G_1, H_1, G_2, H_2 \in BT/R$

$\psi_G : G_1 \to G_2$, $f_1 : M(G_1) \to M(H_1)$

$\psi_H : H_1 \to H_2$, $f_2 : M(G_2) \to M(H_2)$

tels que
$$\begin{tikzcd} M(G_2) \arrow[r, "M(\psi_G)"] \arrow[d, "f_2"'] \arrow[dr, phantom, "G"] & M(G_1) \arrow[d, "f_1"] \\ M(H_2) \arrow[r, "M(\psi_H)"'] & M(H_1) \end{tikzcd}$$

Alors :
$$\begin{tikzcd} A_{G_2} & A_{G_1} \arrow[l, "\psi_G^*"'] \\ A'_{H_2} \arrow[u, "r_{f_2,n}"] & A'_{H_1} \arrow[l, "\psi'_H"] \arrow[u, "r_{f_1,n}"'] \end{tikzcd}$$
commute //

(...)