10/02/15 Hu :

§1 Anneaux semi-parfaits

§2 $A_{cris}(R)$, R semi-parfait

§3 Énoncé du th ppal

§4 Preuve d'un c.p.

---

§1 R anneau de car p

$\varphi = \varphi_R$ frobenius

def (i) R est semi-parfait si φ est surjectif

$\left(\Rightarrow R/\ker(\varphi^n) \simeq R \ \forall n\right)$

(ii) R, S semi-parfaits : $R \xrightarrow{f} S$ isogénie si f est surjectif et $\exists\, n \geq 1$ tq $\ker(f) \subset \ker(\varphi_R^n)$

rem Si $f : R \twoheadrightarrow S$ isogénie :

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi_R^n"] \arrow[d, "f"'] & R \\ S \simeq R/\ker f \arrow[r, two heads] \arrow[ur, dashed, "g"] & R/\ker(\varphi_R^n) \arrow[u, "\wr\, \varphi_R^n"'] \end{tikzcd}$$

$g \circ f = \varphi_R^n$

et de plus $f \circ g = \varphi_S^n$

(donc g isogénie)

Rem si $R \overset{isg}{\simeq} S$ alors $\underset{\underset{\varphi}{\longleftarrow}}{\lim} R = R^\flat \simeq S^\flat = \underset{\underset{\varphi}{\longleftarrow}}{\lim} S$

Def R est f-semi-parfait si
- R semi-parfait
- R est isogène à T/I où T est parfait, I idéal de t.f.

Prop R semi-parfait : R est f-semi-parfait $\Leftrightarrow R^\flat$ est f-adique pour la top. $\underleftarrow{\lim}$

[f-adique : $\exists$ sous-anneau ouvert ayant un idéal de définition de t.f.]

Dans ce cas, R est isogène à T/I avec T parfait et $\varphi(I) = I^p$ (mais I pas forcément de t.f !!)

dém

$J := \mathrm{Ker}(R^\flat \longrightarrow R) = \{(0, x_1, x_2, \dots)\}$

alors $\{\varphi^n(J)\}$ est une base de voisinages de 0

[rq : $\varphi(0, x_1, x_2, \dots) = (0, 0, x_1, \dots)$!]

$\Leftarrow$ $R^\flat$ f-adique, $J_0 \subset R^\flat$ idéal de déf. de tf

$\Rightarrow \exists n$ tq $\varphi^n(J) \subset J_0 \Rightarrow J \subset \varphi^{-n}(J_0)$ [Rque si on veut on peut prendre $R^\flat$ comme le sous-anneau ouvert dans la déf. de f-adique]

On pose $T = R^\flat$, $I = \varphi^{-n}(J_0)$

$R = R^\flat / J \longrightarrow R^\flat / \varphi^{-n}(J_0)$ //

$\Rightarrow$ si $R \sim T/I$

$R^\flat \simeq (T/I)^\flat = \varprojlim_{\varphi} T/I = T / \bigcap_n I^{p^n}$

et I est un idéal de définition de tf //

§2 $A_{cris}(R)$

R semi-parfait

$J = \mathrm{Ker}(R^\flat \to R)$

$\theta : W(R^\flat) \twoheadrightarrow R^\flat \twoheadrightarrow R$ (pas le θ de Fontaine mais donne le même A_{cris} (facile à voir))

alors $\mathrm{Ker}\,\theta = \{ \sum_{n \geq 0} p^n [x_n] \mid x_0 \in J \}$

déf $A_{cris}(R)$ = séparé complété p-adique de l'enveloppe à PD de $W(R^\flat)$ relt à $\mathrm{Ker}\,\theta$

Prop $\theta = A_{cris}(R) \to R$ est un PD-épaississ^t universel de R,
ie si $f : A \twoheadrightarrow R$ avec $\begin{cases} \mathrm{Ker}(f) \text{ PD-idéal} \\ A \text{ sép p-adiq}^t \text{ séparé complet} \end{cases}$

alors $\exists ! \, \alpha : A_{cris}(R) \longrightarrow A$ tq - - -

ex (i) si R parfait, $R^\flat = R$ et $A_{cris}(R) = W(R^\flat)$

(ii) Si $J = (x)$ ~~~~ ppal, alors

$$A_{cris}(R) = \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n \frac{[x]^n}{n!} \;\middle|\; a_n \in W(R^\flat),\ \underset{p\text{-adiq}^t}{a_n \to 0} \right\}$$

Rem (i) $A_{cris}(R)$ peut avoir de la p torsion (cf PB-Ogus 83, appendice) :

ex $R = \mathbb{F}_p[X^{p^{-\infty}}, Y^{p^{-\infty}}] / (X^2, XY, Y^2)$

alors $R^\flat = \mathbb{F}_p[[X^{p^{-\infty}}, Y^{p^{-\infty}}]]$

$\tau := \gamma_p([X]^2)\, \gamma_p([Y]^2) - \gamma_p([XY])^2 \neq 0$

mais $p\tau = 0$.

(ii) $W(R^\flat) \longrightarrow A_{cris}(R)$ en g^{al} pas injective

mais elle l'est si R est f-semi-parfait

Lemme Si J principal $= (x)$, x régulier dans $R^\flat$,
alors $A_{cris}(R)$ n'a pas de p-torsion -

dém $\xi = [x] \in W(R^\flat)$: alors

$$0 \longrightarrow (T-\xi)W(R^\flat)\{\langle T\rangle\} \longrightarrow W(R^\flat)\{\langle T\rangle\} \xrightarrow{\lambda} A_{cris}(R) \longrightarrow 0$$
$$T \longmapsto \xi$$
exacte

où $W(R^\flat)\{\langle T\rangle\} = \left\{ \sum_{n\geq 0} a_n \frac{T^n}{n!} \;\middle|\; a_n \in W(R^\flat),\ a_n \to 0 \right\}$

Soit $a = \sum a_n \frac{\xi^n}{n!}$, $\tilde{a} = \sum a_n \frac{T^n}{n!}$

on suppose $pa = 0$ dans $A_{cris}(R)$ $\Rightarrow a = 0$?

par hyp $p\tilde{a} = (T-\xi)b$, $b = \sum_{n\geq 0} b_n \frac{T^n}{n!}$

donc $\sum p a_n \frac{T^n}{n!} = \sum b_n \frac{T^{n+1}}{n!} - \sum (\xi b_n) \frac{T^n}{n!}$

$$\Rightarrow \begin{cases} pa_0 + b_0\xi = 0 \\ pa_n + \xi b_n - n b_{n-1} = 0, & n \geq 0 \end{cases}$$

en réduisant mod p : $\begin{cases} \bar{b}_0 x = 0 \\ x\bar{b}_n - n\bar{b}_{n-1} = 0, & n \geq 0 \end{cases}$

x régulier $\Rightarrow \bar{b}_n = 0$ $\forall n$ dans $R^\flat$

$\Rightarrow b \in pW(R^\flat)\{\langle T\rangle\}$ //

<u>Rem</u> le lemme marche encore si J engendré par une suite régulière.

. On pose $I_{cris}(R) = \ker\left(A_{cris}(R) \xrightarrow{\theta} R\right)$

$=$ adhérence de l'idéal $(\gamma_n([x]),\ x \in J,\ n \geq 1)$

où $J = \ker(R^\flat \twoheadrightarrow R)$

$I = \ker(W(R^\flat) \xrightarrow{\theta} R)$

Lemme $\exists$ une unique appl. φ-semi-linéaire

$$\varphi^1 : I_{cris}(R) \longrightarrow A_{cris}(R)$$

tq $p\varphi^1 = \varphi$, $\varphi^1(p) = 1$, $\varphi^1(\gamma_n([x])) = \frac{(np)!}{n!\,p}\,\gamma_{np}[x]$

$\forall x \in J$, $\forall n \geq 1$

démo. unicité : OK

. existence :
on va montrer que $\forall m \geq 1$, $\exists!$ $I_{cris}(R)/p^m A_{cris} \longrightarrow A_{cris}(R)/p^{m-1}$

avec les mêmes pptés (à cause de la déf comme PD-enveloppe)

. $I_{cris}(R)/(p^m)$ est engendré par les $(p, \gamma_p(a))$ vérifiant

certaines relations universelles :

soient $a_1, \dots, a_r \in W(R^b)/p^m$, $\in \ker\theta$: on écrit $a_i = \sum_{j=0}^{m-1} p^j [a_{i,j}]$

où $a_{i,j} = (a_{i,j}(0), a_{i,j}(1), \dots) \in R^b$

et $a_{i,0} = (0, a_{i,0}(1), \dots) \in J$

$$\exists R' := \mathbb{F}_p\left[X_{i,j}^{p^{-\infty}}\right]_{\substack{1\leq i\leq r\\0\leq j\leq m-1}} \Big/ (X_{i,0})_{1\leq i\leq r} \longrightarrow R$$

$$\begin{cases} X_{i,j}^{p^{-n}} \longmapsto a_{i,j}(n) \\ (X_{i,0} \longmapsto 0) \end{cases}$$

d'où $A_{cris}(R')/p^{m-1} \longrightarrow A_{cris}(R)/p^{m-1}$

et les relations universelles à vérifier proviennent

de $A_{cris}(R')/p^{m-1}$

à montrer : φ^1 respecte ces relations ...

//

§3 Th ppal (énoncé)

R semi-parfait, G gpe $\underbrace{p\text{-div}}_{=BT}$ sur Spec R

$BT(R)$ = cat des $BT/\mathrm{Spec}\, R$

$\mathrm{Dieu}(R)$ = modules de Dieudonné sur $A_{cris}(R)$ i.e

· module projectif de tf M avec

$$\begin{cases} F : M \otimes_{A_{cris}, \varphi} A_{cris} \longrightarrow M \\ V : M \longrightarrow M \otimes_{A_{cris}, \varphi} A_{cris} \\ FV = p,\ VF = p \end{cases}$$

$M : BT(R) \longrightarrow \mathrm{Dieu}(R)$

Th Si R est f-semi-parfait, le foncteur

$$\underbrace{BT(R)_{\mathbb{Q}}}_{\text{à isog près}} \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Dieu}(R)_{\mathbb{Q}}}_{\text{modules sur } A_{cris}(R)[\frac{1}{p}]}$$

est pleinement fidèle

Prop $R \xrightarrow{f} S$ isogénie d'anneaux semi-parfaits :

alors $BT(R)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} BT(S)_{\mathbb{Q}}$

$\mathrm{Dieu}(R)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Dieu}(S)_{\mathbb{Q}}$

dém facile.

§4 le cas $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to \mu_{p^\infty}$

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}(R)}\left(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \mu_{p^\infty}\right)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Dieu}(R)}\left(M(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)[\tfrac{1}{p}], M(\mu_{p^\infty})[\tfrac{1}{p}]\right)$$

On a $M(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = (A_{cris}(R)e,\ Fe = pe\ )$

$M(\mu_{p^\infty}) = (A_{cris}(R)e',\ Fe' = e')$

d'où $\mathrm{Hom}(M(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p), M(\mu_{p^\infty})) = A_{cris}(R)^{\varphi = p}$!

<u>Lemme</u> On a l'identification

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \mu_{p^\infty}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M(\ ), M(\ ))$$

$J = \mathrm{Ker}(R^b \to R)$ $\quad \wr\!\mid$

$$1+J \xrightarrow{\log[\cdot]} A_{cris}(R)^{\varphi=p}$$

$$x \longmapsto \log[x] = -\sum_{n\geq 1}(n-1)!\,\gamma_n(1-[x])$$

qui converge ds A_{cris}

<u>rem</u> $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \mu_{p^\infty}) = \{(x_n) \in R^{\mathbb{N}} \mid x_0 = 1,\ x_{n+1}^p = x_n\}$

① lemme $\log[\cdot] : 1+J \to A_{cris}(R)^{\varphi=p}$ est injective

<u>dém</u> $x \in 1+J$ $\log[x] = 0$

$$\Rightarrow \forall k \geq 1,\ \log[x^{p^k}] = 0$$

$$\Rightarrow 0 = ([x^{p^k}]-1)\Big(\underbrace{1 + \sum_{n\geq 0}\frac{(1-[x]^{p^k})^{n-1}}{n}}_{\lambda_k \in 1+pA_{cris}(R) \subset A_{cris}(R)^\times\ ?}\Big)$$

(alors on a gagné)

et on montre que

$$\begin{cases} \text{si } p \neq 2,\ \lambda_1 \in 1 + pA_{cris}(R) \\ \text{si } p = 2,\ \lambda_2 \in 1 + pA_{cris}(R) \end{cases}$$

Rem alors si $w \in 1 + \underbrace{\ker \theta}_{= \ker(W(R^b) \to R)}$ et $\log w = 0$

alors $\begin{cases} w = 1 & (p \neq 2) \\ w^2 = 1 & (p = 2) \end{cases}$ (même dém)

(2) montrons que si $a \in A_{cris}(R)^{\varphi = p}$, $\exists x \in 1 + J$ et $k \in \mathbb{N}$ tq $\log[x] = p^k a$:

. OPS $a \in I_{cris}(R)^{\varphi = p}$ (remplacer a par pa)

. OPS $a \in I_{cris}(R)^{\varphi^1 = 1}$: car $\varphi(a) = p\varphi^1(a) = pa$
et si on remplace a par pa on tombe dans $I_{cris}(R)^{\varphi^1 = 1}$

. on note N l'adhérence de l'idéal $(\gamma_n([x]), x \in J, n \geq 1)$
$\cap$
$A_{cris}(R)$
($\Rightarrow I_{cris}(R) = N + (p)$)

de plus : $[J] := \left\{ \sum_{n \geq 0} p^n [x_n] \, , x_n \in J \right\} \subset W(R^b)$

(si on suppose $\varphi(J) = J^p$, c'est un idéal
et on peut le supposer car $R \sim T/I$, T parfait...)

On a $A_{cris}(R)/N \xrightarrow{\sim} W(R^b)/[J]$:

lemme $\varphi^1 : I_{cris}(R) \longrightarrow A_{cris}(R)$
alors N est stable par φ^1, et $\varphi^1|_N$ est topol^t nilpotent

dém $\varphi^1(\gamma_n[x]) = \underbrace{\frac{(pn)!}{n!\,p}}_{\in \mathbb{Z}_p \text{ et } \to 0} \gamma_{np}([x]) \in N$. //

~~On écrit~~ On écrit $a = w + n$, $w \in W(R^b)$, $n \in N$:
posons $z = n - \varphi^1(n) \in N$: $a = w + z + \varphi^1(n)$
$= w + z + \varphi^1(z) + (\varphi^1)^2(n)$
$= w + \sum_n (\varphi^1)^n (z)$ Converge

de plus $\varphi^1(a) = a$, $\varphi^1(w) + \varphi^1(n) = w + n$
$\Rightarrow z = \underset{\in N}{n - \varphi^1(n)} = \underset{\in [J]}{\varphi^1(w) - w}$: on écrit donc $z = \sum p^i [z_i]$ $z_i \in J$

~~(...)~~ donc $a = w + \sum_{i \geq 0} p^i \sum_{j \geq 0} (\varphi^1)^j ([z_i])$

lemme ~~soit~~ $AH(t)$ (exp d'Artin-Hasse)
$$= \exp\left(t + \frac{t^p}{p} + \frac{t^{p^2}}{p^2} + \cdots\right) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[t]]$$
Alors $\log AH([x]) = \sum_{j \geq 0} (\varphi^1)^j ([x])$ $(x \in J)$ //