Espace de modules des groupes p-divisibles

Yougquan Hu, 7/4/15

§1. Énoncé du th.

L = corps parfait, car $= p$.
$W(L)$
$\mathrm{Nilp}_{W(L)}$ = cat. des schémas sur $\mathrm{Spec}\, W(L)$, localement noethériens, tq $p\cdot\mathcal{O}_S$ soit loc. nilpotent.

un tel S peut être vu comme, ou plutôt définit, un schéma formel sur $\mathrm{Spf}\, W(L)$

On note $\bar{S} \hookrightarrow S$ le fermé défini par $p\cdot\mathcal{O}_S$.

Déf : soit $\mathbb{X}$ un groupe p-div. sur L. On considère le fct :

$$\mathcal{M} : \mathrm{Nilp}_{W(L)} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$
$$S \longmapsto \{(X,\rho)\}/\cong$$

où X est un groupe p-div sur S
$\rho : \mathbb{X}_{\bar{S}} \to X_{\bar{S}}$ est une quasi. isogénie
où $(X_1,\rho_1) \sim (X_2,\rho_2)$ ssi $\rho_1 \circ \rho_2^{-1} : X_{2,\bar{S}} \longrightarrow X_{1,\bar{S}}$ se relève en un isom $X_2 \to X_1$ sur S.

Th (Rapoport. Zink) supposons $\mathbb{X}$ décent. Alors le foncteur $\mathcal{M}$ est représentable par un schéma formel localement formellement de type fini sur $\mathrm{Spf}\, W(L)$

Notions : (a) décent : Soit (N,F) l'isocristal de Dieudonné (sur L) du groupe p-div $\mathbb{X}$. C'est un $W(L)[\frac{1}{p}]$-E.V. N muni d'un Frobenius σ-linéaire.
On dit que (N,F) est décent si N est engendré par des éléments v vérifiant $F^s v = p^r v$ pour $r, s \in \mathbb{Z}$, $s>0$
dépendants de v!

On dit que $\mathbb{X}$ est décent si (N, F) l'est.

<u>NB</u> Si $\bar{L} = L$ alors tout (N, F) est décent.

(b) Si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel loc. noethérien, soit $\mathcal{J}$ le plus grand idéal de définition

Soit $\mathfrak{X}_{red} = V(\mathcal{J}) \hookrightarrow \mathfrak{X}$

On dit que $\mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ est (localement) formellement de type fini si $\mathfrak{X}_{red} \to \mathcal{Y}_{red}$ est (loc^t) de type fini.

(c) <u>quasi-isogénie</u> : on rappelle qu'une isogénie est un $\rho: X \to Y$ tq $p^n \rho$ est une isogénie, pour un n.

Une quasi-isogénie $X \to Y$ sur S est une section globale ρ du faisceau $\mathcal{H}om_S(X, Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ telle que localement, il existe $n \geq 0$ tq $p^n \rho$ soit une isogénie. On note $\mathrm{QIsog}_S(X, Y)$ le groupe des quasi-isogénies.

<u>th</u> (rigidité des quasi-isogénies) $S \in \mathrm{Nilp}_{W(L)}$, $\bar{S} \hookrightarrow S$

Alors le morphisme $\mathrm{QIsog}_S(X, Y) \to \mathrm{QIsog}_{\bar{S}}(X_{\bar{S}}, Y_{\bar{S}})$ est un iso. $\boxtimes$

On peut décrire $\mathcal{M}$ comme suit. On choisit $\tilde{\mathbb{X}}$ un groupe p-div. sur $\mathrm{Spf}\, W(L)$ qui relève $\mathbb{X}/L$. Alors :

$$\mathcal{M}(S) = \{(X, \tilde{\rho})\}/_{\simeq} \quad \text{où } X = \text{groupe } p\text{-div sur } S, \quad \tilde{\rho}: \tilde{\mathbb{X}}_S \to X \text{ quasi-isog.}$$

<u>Hauteur</u> : si $\rho: X \to Y$ isogénie alors $\ker(\rho)$ est de rang p^h où h est appelé hauteur et noté $ht(\rho)$.

Si $\rho: X \to Y$ quasi-isog., on pose $ht(\rho) = ht(p^n \rho) - ht(p^n)$ pour $n \gg 0$.

Prop Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit un sous-foncteur $\mathcal{M}^n \subset \mathcal{M}$:

$$\mathcal{M}^n : S \longmapsto \mathcal{M}^n(S) = \{ (X, \tilde{\rho}) : p^n \tilde{\rho} \text{ est une isogénie} \}$$

Alors $\mathcal{M} = \varinjlim \mathcal{M}^n$ et chaque $\mathcal{M}^n$ est un sous-foncteur fermé de $\mathcal{M}$, et est représentable par un schéma formel, localement formellement de type fini sur $\mathrm{Spf}\, W(L)$.

Dém: On écrit $\mathcal{M}^n = \coprod_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{M}^{n,m}$ où $\mathcal{M}^{n,m}$ paramètre les $(X, \tilde{\rho})$ avec $p^n \tilde{\rho}$ de hauteur m. La donnée d'un tel $(X, \tilde{\rho})$ est équiv. à celle d'un schéma en groupes fini $\ell\ell$ de rang p^m : $G \subseteq \tilde{\mathbb{X}}_S[m]$, vu que $p^n \tilde{\rho} : \tilde{\mathbb{X}}_S \to X$ isog.
C'est donc représentable par un sous-schéma fermé de $\mathrm{Grass}(\tilde{\mathbb{X}}[m])$. ⊠

§2. Résultats sur les quasi-isogénies

On va définir une métrique sur $\mathcal{M}(P)$, P/L corps parfait.
Soient X, Y sur P, et $\alpha : X \to Y$ une quasi-isogénie.
On pose $q(\alpha) = ht(p^n \alpha)$ où n est le plus petit entier tel que $p^n \alpha$ soit une isogénie. On a $q(\alpha) \in \mathbb{Z}$.

Propriétés :
(i) $q(\alpha) = q(p^n \alpha)$ $\forall n$.
(ii) $q(\alpha) = q(\alpha_{P'})$ pour P'/P ext. parfaite.
(iii) Si $X, Y/S$ et $\alpha : X \to Y$ quasi-isog, alors $\{ s \in S \,;\, q(\alpha_s) \leq c \} \subseteq S$ fermé $(\forall c \in \mathbb{Z})$ ⊠

On pose $d(\alpha) := q(\alpha) + q(\alpha^{-1})$ pour $\alpha : X \to Y$ sur P.
Explicitement : Soit m_+ (resp m_-) le plus petit entier tel que $p^{m_+} \alpha$ (resp $p^{m_-} \alpha^{-1}$) est isogénie, alors

$$d(\alpha) = (m_+ + m_-)\, ht(X).$$

En effet $p^{m_+ + m_-} : X \xrightarrow{p^{m_+}\alpha} Y \xrightarrow{p^{m_-}\alpha^{-1}} X$

donc $0 \to \ker(p^{m_+}\alpha) \to \ker(p^{m_+ + m_-}) \to \ker(p^{m_-}\alpha^{-1}) \to 0$

Cor : Si $m_- \geq 0$, alors $m_+ \leq \frac{d(\alpha)}{ht(X)}$

Si (X,ρ) et $(X',\rho') \in \mathcal{M}(P)$ on définit :

$$d((X,\rho),(X',\rho')) = d(\rho'\circ\rho^{-1}) = q(\rho'\circ\rho^{-1}) + q(\rho\circ\rho'^{-1})$$

C'est une quasi-métrique : on a $d((X,\rho),(X,p\rho)) = 0$

NB Pour le moment on n'a pas vraiment besoin que P soit parfait.

Déf : $\forall h \in \mathbb{Z}$, on définit $\mathcal{M}(h) \subseteq \mathcal{M}$ sous-foncteur des $(X,\tilde{\rho})$ avec $ht(\tilde{\rho}) = h$.

On pose : $\tilde{\mathcal{M}} = \coprod_{h=0}^{ht(\mathbb{X})-1} \mathcal{M}(h)$.

Alors d définit une métrique sur $\tilde{\mathcal{M}}(P)$.

Rem : $\mathcal{M}(h) \xrightarrow{\times p} \mathcal{M}(h + ht(\mathbb{X}))$ isomorphisme.

Il suffit de démontrer le th. de représentabilité pour $\tilde{\mathcal{M}}$.

Rem : (iii) $\{s \in S \text{ tq } d(\alpha_s) \leq c\}$ est fermé.

Soit $(X,\rho) \in \tilde{\mathcal{M}}(P)$, $\rho : \mathbb{X}_P \to X$ une q-isogénie.

Prop : Si $d(\rho) \leq c$ alors $m_+ \leq c/ht(\mathbb{X})$.

Dém Montrons que $m_- \geq 0$.

En général, si $ht(\rho) < ht(\mathbb{X})$ alors $p^{-1}\rho$ n'est pas une isogénie

car $ht(\rho) = ht(p^{-1}\rho) + \underbrace{ht(p)}_{= ht(\mathbb{X})} \geq ht(\mathbb{X})$.

$(X,\rho) \in \tilde{\mathcal{M}}(P) \Rightarrow ht(\rho^{-1}) = -ht(\rho) \leq 0 < ht(\mathbb{X})$

$\Rightarrow m_- \geq 0$ $\boxtimes$
(le plus petit entier tq $p^{m_-}\rho^{-1}$ isogénie)

Prop : $\exists\, a \in \mathbb{N}$ et L'/L finie tels que   <u>$\mathbb{X}$ décent</u>

$\forall\, P$ parfait $/L'$, $\forall\, (X,\rho) \in \mathcal{M}(P)$,

il existe $(Y,\rho') \in \mathcal{M}(L')$ tq $d((X,\rho),(Y_P,\rho')) \leq a$.

Rem a et L' ne dépendent que de $\mathbb{X}$.

<u>Dém</u> :

<u>Lemme</u> Soit M un isocristal sur L. Il existe $a \in \mathbb{N}$ et L'/L finie

tq $\forall\, P/L'$ parfait, $\forall$ cristal $N \subseteq M \otimes W(P)[\frac{1}{p}]$,

$\exists$ cristal $N' \subseteq M \otimes W(L')[\frac{1}{p}]$ t.q. $N \subseteq N' \otimes W(P)$ et d'indice $\leq a$

<u>Dém du lemme</u> : Soit $h = \dim_{W(L)[\frac{1}{p}]}(M)$. Pour simplifier,

on suppose M isocline de pente $r/s \in [0,1]$ $(r,s) = 1$

on prend L' = corps fixe de $\tau := \sigma^s$

<u>Alors</u> : $N + \tau(N) + \dots + \tau^{h-1}(N)$ est stable par τ.

Par descente galoisienne, cet espace est donc $= N' \otimes_{W(L')[\frac{1}{p}]} W(P)[\frac{1}{p}]$

On montre alors que

$$\operatorname{long} \frac{N + \tau(N) + \dots + \tau^{h-1}(N)}{N} \leq a \quad \left(\begin{array}{l}\text{qui ne dépend}\\ \text{que de } M\end{array}\right)$$

On a ... $\boxtimes$

§3. <u>Preuve du théorème</u>

Deux étapes :

1. Montrer que $\tilde{\mathcal{M}}_c$ est représentable par un schéma formel formellement de type fini sur $\operatorname{Spf} W(L)$.

   où pour $c \in \mathbb{Z}$: $\mathcal{M}_c(S) = \{(X,\tilde{\rho})\ ;\ d(\tilde{\rho}_s) \leq c,\ \forall s \in S\}$

   $$\tilde{\mathcal{M}}_c = \coprod_{h=0}^{ht(\mathbb{X})-1} \mathcal{M}_c(h).$$

2. Mq $\tilde{\mathcal{M}} = \coprod_{h=0}^{ht(\mathbb{X})-1} \mathcal{M}(h)$ est représentable.

(1) Soit $\mathcal{M}^n = \{(X,\rho)$ tq $p^n\rho$ isogénie $\}$.

On pose $\tilde{\mathcal{M}}_c^n = \tilde{\mathcal{M}}_c \cap \mathcal{M}^n \hookrightarrow \mathcal{M}^n$ sous-foncteur fermé.

$\Rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_c^n$ représentable.

De plus, on a $\tilde{\mathcal{M}}_c = \varinjlim \tilde{\mathcal{M}}_c^n$

Montrons que si $n \gg 0$, alors $(\tilde{\mathcal{M}}_c^n)_{red} = (\tilde{\mathcal{M}}_c^{n+1})_{red}$.

C'est équiv. à dire que $\forall S$ schéma réduit, $(\tilde{\mathcal{M}}_c^n)(S) = (\tilde{\mathcal{M}}_c^{n+1})(S)$

Or si $(X,\tilde{\rho}) \in \tilde{\mathcal{M}}_c^n(S)$, on a $p^n\tilde{\rho}$ isogénie et $d(\tilde{\rho}_s) \leq c$.

Comme S est réduit, $\Leftrightarrow$ $p^n\tilde{\rho}_s$ isogénie et $d(\tilde{\rho}_s) \leq c$ $(\forall s \in S)$

$\Leftrightarrow$ $p^{n+1}\tilde{\rho}_s$ isogénie et $d(\tilde{\rho}_s) \leq c$ $(\Rightarrow m_+ \leq \frac{c}{ht(X)})$

Prop

si $n \geq c/ht(X)$:

$\Leftrightarrow p^{n+1}\tilde{\rho}$ isogénie

$\Leftrightarrow (X,\tilde{\rho}) \in (\tilde{\mathcal{M}}_c^{n+1})(S)$

Soit $U \subseteq (\tilde{\mathcal{M}}_c^n)_{red}$ ouvert affine, et $n \gg 0$.

Soit $\mathrm{Spf}\, R_n \subseteq \tilde{\mathcal{M}}_c^n$ tq l'espace sous-jacent est U.

Pour $n \gg 0$, $R_{n+1} \to R_n$ surjective, et on pose $R = \varprojlim R_n$

Il faut montrer que R est J-adique, où J = image inverse de $J_n \in R_n$.

Critère: Soit $\mathfrak{a}_n = \ker(R \to R_n)$.

Supposons (i) $\forall m \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{a}_1 + J^m \supseteq \mathfrak{a}_2 + J^m \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{a}_r + J^m \supseteq \dots$ est stationnaire

(ii) J/J^2 est topologiquement de type fini (comme R-module)

Alors R est J-adique.

(Preuve: admis)

On a vu que $\widehat{\mathcal{M}}^n_c$ est représentable ; soit (X_n, ρ_n) le groupe p-div. universel sur Spf $R_n \subseteq \widehat{\mathcal{M}}^n_c$.

Soit $X = \varinjlim X_n$ qui définit un groupe p-divisible sur chaque $R/\mathfrak{g}^m$ ($\forall m$), car $R/\mathfrak{g}^m = \varprojlim_n R_n/\mathfrak{g}^m R_n$

Alors $\exists N \gg 1$ et un morphisme $R_N \to R/\mathfrak{g}^m$ tel que
$\uparrow$ dép. de m $\qquad (X_N)_{R/\mathfrak{g}^m} \simeq X$.

On en déduit que $\forall n \geq N$, $R_n \to R_N \to R/\mathfrak{g}^m \to R_n/\mathfrak{g}^m R_n$ est la proj. canonique

donc $R_n/\mathfrak{g}^m R_n \simeq R_N/\mathfrak{g}^m R_N$
i.e. on a bien la stationnarité du point (i) du critère.

(2) Mq $\widetilde{\mathcal{M}}$ est représentable, $\widehat{\mathcal{M}} = \coprod_{h=0}^{ht(\cancel{X})-1} \mathcal{M}(h)$.