GROUPES DE BARSOTTI-TATE, I

par

David

On fixe un nombre premier p. On donne la définition, les propriétés élémentaires et quelques exemples saillants de groupes de Barsotti-Tate. Lorsque p est localement nilpotent sur la base, on esquisse les arguments permettant de montrer que le complété formel d'un Barsotti-Tate le long de la section unité est un groupe de Lie formel. Ces arguments sont détaillés dans la référence [**Mes72**].

1. Groupes de Barsotti-Tate : définitions, propriétés élémentaires, exemples

1.1. Définitions et propriétés élémentaires. — Soit S-un schéma. Un S-groupe est par convention un faisceau fppf en groupes abéliens sur S. Pour tout S-groupe G et tout entier naturel n, $G(n)$ désigne le noyau de la multiplication par p^n.

Définition 1.1. — Un groupe de Barsotti-Tate sur S, ou S-Barsotti-Tate, est un S-groupe vérifiant les propriétés suivantes :

1. G est de p-torsion, en d'autres termes le morphisme naturel $\varinjlim G(n) \to G$ est un iso
2. La multiplication par p induit un épimorphisme $G \to G$
3. $G(1)$ est un S-schéma en groupes fini localement libre

Les S-Barsotti-Tate forment une sous-catégorie pleine de la catégories des S-groupes, mais ne forment pas une catégorie abélienne (pas de noyau).

Si G est un S-Barsotti-Tate, pour $0 \leqslant i \leqslant n$, $p^{n-i} : G(n-i) \to G(i)$ est un épi et on a une suite exacte

$$0 \to G(n-i) \to G(n) \to G(i) \to 0 \tag{1.1.1}$$

et tous les $G(n)$ sont finis localement libres. Par ailleurs (théorie sur un corps), il existe une fonction $h : S \to \mathbf{N}$ localement constante telle que pour tout n et tout $s \in S$ le rang de $G(n)_s$ est $p^{n\,h(s)}$. On appelle h la hauteur de G. « Réciproquement » si $\{G_n\}$ est un système de S-schémas en groupes tel que $G_n = G_{n+1}(n)$ et il existe une fonction $h : S \to \mathbf{N}$ localement constante telle que pour tout n et tout $s \in S$ le rang de $(G_n)_s$ est $p^{n\,h(s)}$, alors $\varinjlim G_n$ est un S-Barsotti-Tate.

En particulier, si G est un S-Barsotti-Tate

$$G^\vee \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim G(n)^\vee$$

(les flèches $G(n)^\vee \to G(n+1)^\vee$ étant induites par la suite exacte (1.1.1)) est un S-Barsotti-Tate, et $G^\vee(n) = G(n)^\vee$.

Tout changement de base d'un Barsotti-Tate en est un, et le changement de base est compatible à la dualité ci-dessus

1.2. Exemples. — L'exemple qui a motivé le développement de la théorie des groupes de Barsotti-Tate : si $A \to S$ est un schéma abélien de dimension relative d, on montre que $\varinjlim A(n)$ est un S-Barsotti-Tate de hauteur $2\,d$.

$\mu_{\infty,S} = \mathbf{G}_m(\infty)_S \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim \mathbf{G}_{m,S}(n)$ est un S-Barsotti-Tate de rang 1 ; plus généralement, si T est un S-tore de dimension d (*i.e.* est étale-localement sur S isomorphe à $\mathbf{G}_{m,S}^d$) $T(\infty)_S = \varinjlim \mathbf{G}_{m,S}(n)$ est un S-Barsotti-Tate de hauteur d. Son dual $T(\infty)_S^\vee$ est un exemple de Barsotti-Tate ind-étale.

2. Lorsque p est localement nilpotent sur la base, le complété formel d'un Barsotti-Tate est un goupe de Lie formel

2.1. Variétés de Lie formelles, groupes de Lie formel. — Si (X, e) est un faisceau fppf sur S muni d'une section, on peut considérer le complété formel $\overline{X_e}$ de X le long de cette section (qui sera un sous-faisceau fppf de X).

Précisons : on a

$$\overline{X_e} \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim \ \mathrm{Inf}_e^k(X)$$

où plus généralement pour un sous-faisceau Y de X, $\mathrm{Inf}_Y^k(X)$ généralise la notion de k-ème voisinage infinitésimal de Y dans X ($Y \hookrightarrow X$ immersion de schémas) $\mathrm{Inf}_Y^k(X)(T)$ est l'ensemble des sections $T \to X$ tel qu'il existe un recouvrement ouvert $T = \cup T_i$ et pour tout i il existe une immersion fermée k-nilpotente $T_i' \to T_i$ telle que la section induite $T_i' \to X$ se factorise à travers Y. On vérifie qu'on retrouve la notion schématique standard si X et Y sont des schémas (si $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $Y = \mathrm{Spec}(A/I)$, $\mathrm{Inf}_Y^k(X) = \mathrm{Spec}(A/I^{k+1})$) et que la formation des $\mathrm{Inf}_Y^k(X)$ commute au changement de base.

On vérifie sur la définition que si X est un groupe, $\overline{X}$ aussi.

Si (X, e) est un faisceau pointé qui est un schéma séparé, e est une immersion fermée, et par la suite $e_k : S \to \mathrm{Inf}_e^k(X)$ également, et on peut associer une algèbre graduée à e_k.

Définition 2.1. — (X, e) faisceau pointé est une variété de Lie formelle si

1. on a $X = \varinjlim \ \mathrm{Inf}_e^k(X)$ et les $\mathrm{Inf}_e^k(X)$ sont représentables ; on pose alors $\omega_X = e^*(\Omega^1_{\mathrm{Inf}^1(X)/S})$.

2. ω_X est localement libre de type fini et on a un isomorphisme de $\mathscr{O}_S$-algèbres graduées
$$\mathrm{Sym}(\omega_X) \xrightarrow{\sim} \oplus_k \mathrm{gr}^k(\mathrm{Inf}^k(X))$$
gr^k est la partie homogène de degré k de la $\mathscr{O}_S$-algébre graduée associée à l'immersion fermée $e_k : S \to \mathrm{Inf}^k(X)$

En termes plus concrets, (X, e) est une variété de Lie formelle si il est, localement sur S, isomorphe à $\mathrm{Spf}(\mathscr{O}_S[[T_1, \dots, T_n]])$ c'est-à-dire
$$\forall\, T \in \mathbf{Sch}_S, \quad \overline{X}(T) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathscr{O}_S[[T_1, \dots, T_n]], \Gamma(T, \mathscr{O}_T))$$
Les S-variétés de Lie formelles forment une sous-catégorie pleine de la catégorie des S-faisceaux fppf pointés.

Un groupe de Lie formel est un S-groupe qui est une variété de Lie formelle.

2.2. Le résultat. —

Théorème 2.2. — *Si p est localement nilpotent sur S et si G est un S-Barsotti-Tate, $\overline{G}$ est un groupe de Lie formel*

2.3. Si p est localement nilpotent sur S et si G est un BT$/S$, les voisinages infinitésimaux de la section neutre sont représentables. — Comme $\mathrm{Inf}^k(G)$ est un faisceau, il suffit de traiter le cas où p est nilpotent sur S. Le résultat cherché est alors fourni par le lemme suivant.

Lemme 2.3. — *Soit G un S-Barsotti-Tate. Si p^N tue S et n est tel que $k < p^n$ alors $\mathrm{Inf}^k(G) \subset G(n+N-1)$ et donc $\mathrm{Inf}^k(G) = \mathrm{Inf}^k(G(n+N-1))$.*

Démonstration. — ([**Mes72**, 3.3.15,3.3.17]) Soit X' un S-schéma, soit $X \hookrightarrow X'$ une immersion fermée k-nilpotente et $f : X' \to G$ une section triviale sur X. Il faut montrer que f se factorise à travers $G(n+N-1)$. Comme le problème est local sur X' on peut supposer X' affine et alors, par quasi-compacité, f se factorise à travers $G(m)$ pour un certain m.

On réduit tout modulo p, on met un indice 0 pour la réduction modulo p. On sait (lemme ci-dessous) que
$$\mathrm{Inf}^k(G_0) \subset G_0[n] \subset G_0(n)$$
Ainsi la composée $Y = X'_0 \hookrightarrow X' \to G(m)$ se factorise à travers $G(n)$. Or Y est défini par l'idéal $I = p\,\mathscr{O}_{X'}$ qui vérifie $I^N = 0$. Montrons que ceci implique que $p^{n+N-1} f$ est trivial. Par une récurrence et en remplaçant Y par $\mathscr{Z}(I^{N-1})$, on se ramène au cas où $N = 2$.

Alors, comme Y est défini par l'idéal de carré nul I, on sait que le groupe des sections de $G(m)$ sur X' triviales sur Y s'identifie au groupe
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{X'}}(\omega_{G(m)} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_{X'}, I)$$
donc ce groupe est de p-torsion. Or par hypothèse, $p^n\, f_{|_Y}$ est trivial, donc $p^{n+1} f$ est trivial, cqfd. $\square$

Si S est de caractéristique p et G est un S-groupe, on note $G[n]$ le noyau du Frobenius relatif itéré n fois. Si G est plat sur S, grâce au Verschiebung, on a $G[n] \subset G(n)$.

Lemme 2.4. — *Supposons S de caractéristique p et soit G un S-Barsotti-Tate. Alors pour tout n,* $\mathrm{Inf}^{p^n-1}(G) \subset G[n]$

Démonstration. — [**Mes72**, p.34] Pour tout S-schéma (voire S-faisceau) T on note $F_T : T \to T$ le Frobenius absolu. Pour $k < p^n$, on considère un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f"] & G \arrow[d, shift left, "\pi"] \\ T' \arrow[u, hook, "k-\mathrm{nil}"] \arrow[r] & S \arrow[u, shift left, "e"] \end{tikzcd} \tag{2.3.1}$$

Le but est de montrer que $f \in G[n](T)$. Comme $F_G^n : G \to G$ se factorise à travers $G \to G^{(p^n)}$, il suffit de montrer que $F_G^n f = 0$. Mais $F_G^n f = f\, F_T^n$, et comme $k < p^n$, on peut compléter le diagramme di-dessus ainsi

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "F_T^n"] \arrow[dr, "\exists"'] & T \arrow[r, "f"] & G \arrow[d, shift left, "\pi"] \\ & T' \arrow[u, hook] \arrow[r] & S \arrow[u, shift left, "e"] \end{tikzcd} \tag{2.3.2}$$

ce qui montre que $f\, F_T^n$ est trivial. □

2.4. Si p est localement nilpotent sur S et si G est un BT$/S$, G est un groupe de Lie formel. —

2.4.1. Démonstration en admettant que G est formellement lisse. — Par définition, la formelle lissité de G implique aussitôt celle de $\overline{G}$.

On utilise un critère de relèvement infinitésimal pour la « lissité à l'ordre k le long d'une section ».

Lemme 2.5. — *Soit (X, e) un S-schéma pointé localement de présentation finie sur S. Sont équivalents :*

1. *Zariski-localement sur S, on a un isomorphisme de schéma pointé*
$$\mathrm{Inf}_e^k(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_S[T_1, \dots, T_n]/\langle T_1, \dots, T_n\rangle^{k+1})$$
2. $\omega_X = e^*(\Omega^1_{X/S})$ *est localement libre de type fini et* $\mathrm{Sym}^i(\omega_X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}^i(X, e)$ *pour $i \leqslant k$*
3. *Pour tout schéma S-schéma affine $\tilde{Y}$, toute S-immersion k-nilpotente $\tilde{Y} \hookrightarrow Y'$, tout sous-$S$-schéma Y de Y' contenant Y, tout S-morphisme $f : Y \to X$ dont la restriction à $\tilde{Y}$ se factorise par e, f se prolonge à $f' : Y' \to X$.*

Démonstration. — Raisonnement « élémentaire » d'algèbre différentielle □

La formelle lissité de $\overline{G}$ montre aussitôt que le point 3 est vérifiée pour $\mathrm{Inf}^k(G)$ ($f : Y \to \mathrm{Inf}^k(G)$ se relève à $\mathrm{Inf}^n(G)$, mais ce relèvement est automatiquement, grâce à l'hypothèse sur la restriction à $\tilde{Y}$, dans $\mathrm{Inf}^k(G)$).

Or localement sur S, $\mathrm{Inf}^k(G) = \mathrm{Inf}^k(G(m))$. Ainsi localement sur S le point 1 est vérifiée.

2.4.2. G est formellement lisse. —

Théorème 2.6. — [**Mes72**, 3.3.13] *Soit S un schéma sur lequel p est localement nilpotent. Soit G un Barsotti-Tate sur S. Alors G est formellement lisse.*

Remarque 2.7. — Lorsque p n'est pas localement nilpotent sur la base, Messing donne un exemple qui montre qu'un S-Barsotti-Tate n'est pas nécessairement formellement lisse : en fait il montre que $\mu_{\infty,\mathrm{Spec}(A)}$ n'est pas formellement lisse si $\frac{1}{p}$ appartient à l'image de A dans A_p.

Démonstration. — Rappelons que montrer que G est formellement lisse revient à montrer : pour tout S-schéma affine X' et tout sous-schéma fermé X défini par un idéal de carré nul, tout S-morphisme de X vers G se relève à X'. Mais $\mathrm{Hom}(X, G) = \varinjlim \mathrm{Hom}(X, G(n))$ car X est quasi-compact. Si $\{S_i\}$ est un recouvrement ouvert affine et $\{X_{i,j}\}$ un recouvrement ouvert affine de $f^{-1}(S_i)$, comme X est quasi-compact, on peut trouver un recouvrement ouvert affine de $X = \cup_i X_i$ tel que l'image de chaque X_i est incluse dans un ouvert affine S_i de S. Par changement de base à $\cup S_i$, on se ramène alors au cas où p est nilpotent sur S. Les résultats ci-dessous permettent alors de conclure $\square$

La clef pour la lissité formelle est d'utiliser un critère en termes des complexes cotangents des différents $G(n)$. La démonstration que le critère en question s'applique bien se fait par réduction à la caractéristique p, où l'on utilise alors abondamment Frobenius et Verschiebung.

Rappelons très brièvement la définition du complexe cotangent associé à un S-schéma en groupes G fini localement libre. Si $G = \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ on note $\mathscr{U}(G)^\times$ le schéma en groupes des éléments inversibles de $\mathcal{A}^\vee$. On montre qu'on a une immersion fermée $G \hookrightarrow \mathscr{U}(G)^\times$. Notons I le faisceau d'idéaux de $\mathscr{U}(G)^\times$ correspondant. Le complexe cotangent $L_\bullet(G/S)$ est le complexe de $\mathscr{O}_G$-modules

$$I/I^2 \to \Omega^1_{\mathscr{U}(G)^\times/S} \quad \text{tiré en arrière sur } G$$

Le complexe de co-Lie est $\ell^G_\bullet = e^*_G(L^{G/S}_\bullet)$. On a un foncteur contravariant $G \to \ell^G_\bullet$. On a $\omega_G = H_0(\ell^G_\bullet)$ et on pose $n_G = H_1(\ell^G_\bullet)$.

Proposition 2.8. — *Soient $G \hookrightarrow H$ des S-schémas en groupes finis localement libre. On suppose que pour tout ouvert affine U de S et tout module quasi-cohérent $\mathcal{M}$ sur U*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_U}((\ell^G_\bullet)_{|U}, \mathcal{M}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_U}((\ell^H_\bullet)_{|U}, \mathcal{M})$$

est la flèche nulle.

Soit X' un S-schéma affine et X un sous-S-schéma fermé défini par un idéal de carré nul.

Alors pour tout S-morphisme $X \to G$ il existe un S-morphisme $X' \to H$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d] & X' \arrow[d, "f'"] \\ G \arrow[r] & H \end{tikzcd} \tag{2.4.1}$$

Démonstration : théorie « élémentaire » de la déformation : on montre que l'obstruction au relèvement réside localement dans l'image de la flèche

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_U}((\ell_\bullet^G)_{|U}, \pi_* I) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_U}((\ell_\bullet^H)_{|U}, \pi_* I)$$

où $\pi : X' \to S$ et I est l'idéal de X.

Compte tenu de la proposition précédente, la proposition suivante permet de montrer la formelle lissité d'un S-Barsotti-Tate lorsque p est localement nilpotent sur la base.

Proposition 2.9. — *Soit S un schéma tué par p^{N+1}. Soit G un S-Barsotti-Tate. Soit $n \geqslant N$.*

Alors pour tout ouvert affine U de S, et tout module quasi-cohérent $\mathcal{M}$ sur U, la flèche

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_U}((\ell_\bullet^{G(n-N)})_{|U}, \mathcal{M}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_U}((\ell_\bullet^{G(n)})_{|U}, \mathcal{M})$$

est nulle.

On se ramène au cas de la caractéristique p, plus précisément on se ramène à montrer la nullité de la flèche

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_{U_0}}((\ell_\bullet^{G_0(n-1)})_{|U_0}, \mathcal{M}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_{U_0}}((\ell_\bullet^{G_0(n)})_{|U_0}, \mathcal{M})$$

où $S_0 = \mathscr{Z}(p)$ et $\mathcal{M}$ est un module quasi-cohérent sur U_0.

En effet, si on a le résultat précédent, et si $\mathcal{M}$ est un $\mathscr{O}_U$-module quasi-cohérent tué par $I := p\mathscr{O}_U$ (donc un $\mathscr{O}_{U_0}$-module), la flèche

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_U}((\ell_\bullet^{G(n-1)})_{|U}, \mathcal{M}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_U}((\ell_\bullet^{G(n)})_{|U}, \mathcal{M})$$

est également nulle (en fait elle s'identifie à la flèche ci-dessus). Par récurrence, en utilisant la suite exacte

$$0 \to I\mathcal{M} \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}/I\mathcal{M}$$

on en déduit que si $\mathcal{M}$ est tué par I^k alors la flèche

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_U}((\ell_\bullet^{G(n-k)})_{|U}, \mathcal{M}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_U}((\ell_\bullet^{G(n)})_{|U}, \mathcal{M})$$

est nulle.

Pour démontrer le résultat voulu en caractéristique p, on étudie en détail le comportement du complexe cotangent vis-à-vis d'une suite exacte de S-groupes finis localement libres

$$0 \to G' \to G \to G'' \to 0$$

[**Mes72**, prop. 3.3.4,cor. 3.3.7, 3.3.9] en vue de l'appliquer à la suite exacte

$$0 \to G(n-1) \to G(n) \to G(1) \to 0$$

Messing démontre et utilise en particulier la proposition suivante

Proposition 2.10. — *1. Soit G un S-schéma en groupe fini localement libre. ω_G est localement libre si et seulement s'il est plat. Dans ce cas n_G est également localement libre, de même rang que ω_G.*

2. Soit

$$0 \to G' \to G \to G'' \to 0$$

une suite exacte de S-schémas en groupes finis localement libres. On a alors une suite exacte de $\mathscr{O}_S$-modules

$$0 \to n_{G''} \to n_G \to n_{G'} \to \omega_{G''} \to \omega_G \to \omega_{G'} \to 0$$

3. [**Mes72**, Corollary 3.3.7]

4. Soit

$$0 \to G' \to G \to G'' \to 0$$

une suite exacte de S-schémas en groupes finis localement libres.

Supposons que $\omega_G \to \omega_{G'}$ soit un isomorphisme, que ω_G et $\omega_{G''}$ sont localement libres et que pour tout $s \in S$, on a $\mathrm{rk}(\omega_{G'_s}) \leqslant \mathrm{rk}(\omega_{G''_s})$. Alors pour tout ouvert affine U de S et pour tout quasi-cohérent $\mathcal{M}$ sur U, la flèche

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_U}((\ell_\bullet^{G'})_{|U}, \mathcal{M}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_U}((\ell_\bullet^{G})_{|U}, \mathcal{M})$$

est nulle.

[**Mes72**] On veut appliquer le dernier point de la proposition précédente à la suite exacte

$$0 \to G(n-1) \to G(n) \to G(1) \to 0$$

Pour montrer que la première hypothèse est vérifiée, on note qu'on a

$$G(n-1)[1] = G(n)[1]$$

et

$$\mathrm{Inf}^1(G(n-1)) \subset G(n-1)[1], \quad \mathrm{Inf}^1(G(n)) \subset G(n)[1]$$

donc $\mathrm{Inf}^1(G(n-1)) = \mathrm{Inf}^1(G(n))$ et $\omega_{G(n-1)} \xrightarrow{\sim} \omega_{G(n)}$.

Puisque $G'' = G(1)$, la troisième hypothèse est vérifiée (? ? ?).

Pour montre que la deuxième hypothèse du critère est vérifiée on applique [**Mes72**, 2.1.2] ; il faut montrer que $G[n]$ est localement libre (on fait ça à coup de Frobenius et Verschiebung) on en déduit que $\omega_{G[n]}$ est localement libre, mais $\mathrm{Inf}^1(G) \subset G[n]$.

Références

[Mes72] William Messing. *The crystals associated to Barsotti-Tate groups : with applications to abelian schemes.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 264. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

David