MAT1
Gr 16

TD du vendredi 27 novembre 2020

Aujourd'hui nous sommes sur la feuille 12

Exercice 1. Calcul des intégrales :

1. $\int_0^{\pi/4} x \sin x \, dx.$
2. $\int_0^1 x e^{3x} \, dx.$

1. Idée : IPP $\boxed{\int u'v = [uv] - \int uv'}$

$$\begin{cases} u'(x) = \sin x \\ v(x) = x \end{cases} \quad \begin{cases} u(x) = -\cos x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi/4} x \sin x dx = \Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} \cos x \, dx$$

$$= \Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi/4} + \Big[\sin x\Big]_0^{\pi/4}$$

$$= \left(-\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

2. $\int_0^1 x e^{3x} dx = ?$ IPP !

$$\begin{cases} u'(x) = e^{3x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{3} e^{3x} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

Rem pour que la formule $\int u'v = [uv] - \int uv'$ soit utile, il faut que $\int uv'$ soit « facile ».

Ce n'est pas toujours le cas ! Par exemple

> $f(x) = e^{x^2}$ n'a pas de primitive calculable avec les fonctions « classiques » (cos, sin, polynômes, $|.|$, ln, exp, ...) $\boxtimes$

$$\int_0^1 \underset{v}{x}\,\underset{u'}{e^{3x}}\,dx = \Big[\underset{v}{x}\,\underset{u}{\tfrac{1}{3}e^{3x}}\Big]_0^1 - \int_0^1 1 \times \frac{1}{3} e^{3x}\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}e^3 - 0 \times 1\right) - \int_0^1 \frac{1}{3} e^{3x}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}e^3 - \left[\frac{1}{9}e^{3x}\right]_0^1 = \frac{1}{3}e^3 - \left(\frac{1}{9}e^3 - \frac{1}{9}\right)$$

$$= \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}\left(2e^3 + 1\right)$$

Exercice 2. Calculer une primitive des fonctions

$$f(x) = \frac{2}{x^2} \quad , \quad f(x) = \frac{x^5}{1+x^6} \quad , \quad f(x) = \frac{3}{1+x^2} \quad , \quad f(x) = \sin(x) \times \cos^2(x).$$

Fonction f	Une primitive F
$\frac{2}{x^2}$	$-\frac{2}{x}$
$\frac{x^5}{1+x^6}$ $\quad \frac{u'}{u}$	$\frac{1}{6} \ln(1+x^6)$
$\frac{3}{1+x^2}$	$3 \arctan x$
$\sin x \cos^2 x$ $u' \; u^2$	$-\frac{1}{3} \cos^3 x$

Exercice 3. On considère un réacteur dans lequel on fait réagir du méthane CH_4 dans du dichlore Cl_2 en excès. On peut dans ce cas modéliser les réactions chimiques par des cinétiques d'ordre 1 :

$$CH_4 \longrightarrow CH_3Cl \longrightarrow CH_2Cl_2 \longrightarrow CHCl_3 \longrightarrow CCl_4.$$

1. On désigne par $X(t)$ la concentration en CH_4 à l'instant t (en seconde) et on pose $x(t) = X(t)/\alpha$, où $\alpha = X(0)$ est la concentration en CH_4 à l'instant initial $t = 0$. On a donc $\boxed{x(0) = 1}$. Les lois cinétiques indiquent que $x(t)$ vérifie l'équation différentielle

$$x'(t) + 4x(t) = 0.$$

Donner toutes les solutions de cette équation différentielle. Donner la solution qui vérifie $x(0) = 1$.

1. Les solutions de l'équa. diff $x'(t)+4x(t)=0$ sont les fonctions $x(t) = c\,e^{-4t}$ $(c \in \mathbb{R})$

La solution t.q $x(0)=1$ est $\underline{x(t) = c\,e^{-4t}}$

RAPPEL SUPER IMPORTANT

On rappelle maintenant que les solutions de l'équation différentielle $f'(x) + a(x)f(x) = 0$ sont exactement toutes les fonctions $f(x) = ce^{-A(x)}$ où A est une primitive de la fonction a et où $c \in \mathbb{R}$.

2. On désigne par $Y(t)$ la concentration en CH_3Cl à l'instant t et on pose $y(t) = Y(t)/\alpha$. À l'instant initial $t = 0$ la concentration en CH_3Cl est nulle, on a donc $y(0) = 0$. Les lois cinétiques indiquent que $y(t)$ vérifie l'équation différentielle

$$y'(t) + 3y(t) = \underline{4e^{-4t}}.$$

- Donner une solution particulière de cette équation différentielle.
- Donner toutes les solutions de cette équation différentielle.
- Donner la solution qui vérifie $y(0) = 0$.
- Etudier cette solution (dérivée, étude du signe de la dérivée, tableau de variations, limite en $+\infty$, tracé du graphe).

- Pour une solution particulière, comment fait-on ?

Deux méthodes : 1) variation de la constante

2) à l'instinct !

Méth 1) dit qu'on peut trouver une sol.

de la forme $y(t) = \underbrace{b(t)}_{u(t)}\underbrace{e^{-3t}}_{v(t)}$

On rappelle maintenant la "méthode de la variation de la constante" : une solution particulière de l'équation différentielle

$$f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$$

est donnée par

$$f_0(x) = c(x)e^{-A(x)}$$

où A est une primitive de la fonction a et où c est une primitive de la fonction $b(x)e^{A(x)}$.

Rappel

$$y'(t) + 3y(t) = \left[b'(t)e^{-3t} - \cancel{b(t)\times 3e^{-3t}}\right] + \cancel{3\,b(t)e^{-3t}}$$

$$= b'(t)e^{-3t}$$

$$\Vert$$

$$4e^{-4t}$$

$$\Rightarrow \quad 4e^{-4t} = b'(t)e^{-3t}$$

$$\Rightarrow \quad b'(t) = 4e^{-t} \Rightarrow b(t) = -4e^{-t}$$

[<u>une</u> prim. suffit!]

$\Rightarrow$ sol. part.

$$y_0(t) = b(t)e^{-3t} = -4e^{-4t}$$

Rem on aurait pu essayer $y(t) = \lambda e^{-4t}$ pour un λ bien choisi.

- Les solutions générales de l'équa. diff. sont

$$y(t) = \underbrace{ce^{-3t}}_{\substack{\text{solution générale} \\ \text{de l'équation sans 2nd membre}}} + \underbrace{-4e^{-4t}}_{\text{solution particulière}} \qquad (c \in \mathbb{R})$$

On a $y(0)=0$ pour $c=4$

donc $y(t) = 4(e^{-3t} - e^{-4t})$.

- Dérivée avec signe, variations, graphique

$y'(t) = -12e^{-3t} + 16e^{-4t}$

$y'(t) \geq 0$ ssi $-12e^{-3t} + 16e^{-4t} \geq 0$

ssi $16e^{-4t} \geq 12e^{-3t}$

ssi $4 \geq 3e^{t}$

ssi $\frac{4}{3} \geq e^{t}$ c'est-à-dire $t \leq \ln\frac{4}{3}$

$\left[\frac{4}{3} = 1{,}33\ldots \quad \ln\frac{4}{3} \simeq 0{,}3\ldots\right]$

x	$-\infty$		$\ln(4/3)$		$+\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	
$y(t)$	?	$\nearrow$		$\searrow$	?

Finir l'exercice

+ graphique.