

Aujourd'hui nous sommes sur la feuille 12

Exercice 1.

Calcul des intégrales :

1.  $\int_0^{\pi/4} x \sin x dx.$

2.  $\int_0^1 x e^{3x} dx.$

1. Idée : IPP

$$\int u'v = [uv] - \int u v'$$

$$\begin{cases} u'(x) = \sin x & \begin{cases} u(x) = -\cos x \\ v'(x) = 1 \end{cases} \\ v(x) = x \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi/4} x \sin x dx = \left[ -x \cos x \right]_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} \cos x dx$$

$$= \left[ -x \cos x \right]_0^{\pi/4} + \left[ \sin x \right]_0^{\pi/4}$$

$$= \left( -\frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 \right) + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right)$$

2.  $\int_0^1 x e^{3x} dx = ?$

IPP!

$$\begin{cases} u'(x) = e^{3x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x) = \frac{1}{3} e^{3x} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

Rem pour que la formule  $\int u'v = [uv] - \int uv'$

soit utile, il faut que  $\int uv'$  soit « facile »

Ce n'est pas toujours le cas ! Par exemple

$f(x) = e^{x^2}$  n'a pas de primitive calculable avec les fonctions « classiques »  
(cos, sin, polynômes, l.l., ln, exp, ...) ☒

$$\int_0^1 \underbrace{x}_{v'} \underbrace{e^{3x}}_{u'} dx = \left[ \underbrace{x}_{v} \underbrace{\frac{1}{3} e^{3x}}_{u} \right]_0^1 - \int_0^1 1 \times \frac{1}{3} e^{3x} dx$$

$$= \left( \frac{1}{3} e^3 - 0 \times 1 \right) - \int_0^1 \frac{1}{3} e^{3x} dx$$

$$= \frac{1}{3} e^3 - \left[ \frac{1}{9} e^{3x} \right]_0^1 = \frac{1}{3} e^3 - \left( \frac{1}{9} e^3 - \frac{1}{9} \right)$$

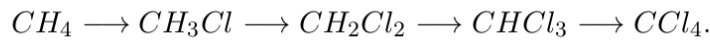
$$= \frac{2}{9} e^3 + \frac{1}{9} = \frac{1}{9} (2e^3 + 1) \quad /$$

Exercice 2. Calculer une primitive des fonctions

$$f(x) = \frac{2}{x^2}, \quad f(x) = \frac{x^5}{1+x^6}, \quad f(x) = \frac{3}{1+x^2}, \quad f(x) = \sin(x) \times \cos^2(x).$$

Fonction $f$	Une primitive $F$
$\frac{2}{x^2}$	$-\frac{2}{x}$
$\frac{x^5}{1+x^6}$ $\frac{u'}{u}$	$\frac{1}{6} \ln(1+x^6)$
$\frac{3}{1+x^2}$	$3 \arctan x$
$\sin x \cos^2 x$ $u' u^2$	$-\frac{1}{3} \cos^3 x$

**Exercice 3.** On considère un réacteur dans lequel on fait réagir du méthane  $CH_4$  dans du dichlore  $Cl_2$  en excès. On peut dans ce cas modéliser les réactions chimiques par des cinétiques d'ordre 1 :



1. On désigne par  $X(t)$  la concentration en  $CH_4$  à l'instant  $t$  (en seconde) et on pose  $x(t) = X(t)/\alpha$ , où  $\alpha = X(0)$  est la concentration en  $CH_4$  à l'instant initial  $t = 0$ . On a donc  $x(0) = 1$ . Les lois cinétiques indiquent que  $x(t)$  vérifie l'équation différentielle

$$x'(t) + 4x(t) = 0.$$

Donner toutes les solutions de cette équation différentielle. Donner la solution qui vérifie  $x(0) = 1$ .

1. Les solutions de l'équa. diff  $x'(t) + 4x(t) = 0$  sont les fonctions  $x(t) = c e^{-4t}$  ( $c \in \mathbb{R}$ )

La solution t.q.  $x(0) = 1$  est  $x(t) = e^{-4t}$

**RAPPEL SUPER IMPORTANT**

On rappelle maintenant que les solutions de l'équation différentielle  $f'(x) + a(x)f(x) = 0$  sont exactement toutes les fonctions  $f(x) = c e^{-A(x)}$  où  $A$  est une primitive de la fonction  $a$  et où  $c \in \mathbb{R}$ .

2. On désigne par  $Y(t)$  la concentration en  $CH_3Cl$  à l'instant  $t$  et on pose  $y(t) = Y(t)/\alpha$ . À l'instant initial  $t = 0$  la concentration en  $CH_3Cl$  est nulle, on a donc  $y(0) = 0$ . Les lois cinétiques indiquent que  $y(t)$  vérifie l'équation différentielle

$$y'(t) + 3y(t) = 4e^{-4t}.$$

- Donner une solution particulière de cette équation différentielle.
- Donner toutes les solutions de cette équation différentielle.
- Donner la solution qui vérifie  $y(0) = 0$ .
- Etudier cette solution (dérivée, étude du signe de la dérivée, tableau de variations, limite en  $+\infty$ , tracé du graphe).

• Pour une solution particulière, comment fait-on?

Deux méthodes: 1) variation de la constante  
2) à l'instinct!

Méth 1) dit qu'on peut trouver une sol.

de la forme  $y(t) = \underbrace{b(t)}_{u(t)} e^{\underbrace{-3t}_{v(t)}}$

On rappelle maintenant la "méthode de la variation de la constante" : une solution particulière de l'équation différentielle

$$f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$$

est donnée par

$$f_0(x) = c(x)e^{-A(x)}$$

Rappel

où  $A$  est une primitive de la fonction  $a$  et où  $c$  est une primitive de la fonction  $b(x)e^{A(x)}$ .

$$\begin{aligned} y'(t) + 3y(t) &= \left[ \cancel{b'(t)e^{-3t}} - \cancel{b(t) \times 3e^{-3t}} \right] + 3 \cancel{b(t)e^{-3t}} \\ &= b'(t)e^{-3t} \\ \parallel \\ 4e^{-4t} & \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 4e^{-4t} = b'(t)e^{-3t}$$

$$\Rightarrow b'(t) = 4e^{-t} \Rightarrow b(t) = -4e^{-t}$$

$\Rightarrow$  sol. part.

[une prim. suffit!]

$$y_0(t) = \underline{b(t)e^{-3t} = -4e^{-4t}}$$

Rem on aurait pu essayer  $y(t) = \lambda e^{-4t}$  pour un  $\lambda$  bien choisi.

• des solutions générales de l'équa.-diff. sont

$$y(t) = \underbrace{ce^{-3t}}_{\text{solution générale de l'équation sans 2nd membre}} + \underbrace{-4e^{-4t}}_{\text{solution particulière}} \quad (c \in \mathbb{R})$$

On a  $y(0)=0$  pour  $c=4$

$$\text{donc } y(t) = 4(e^{-3t} - e^{-4t}) -$$

• Dérivée avec signe, variations, graphique

$$y'(t) = -12e^{-3t} + 16e^{-4t}$$

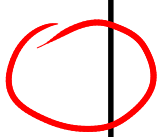
$$y'(t) \geq 0 \text{ ssi } -12e^{-3t} + 16e^{-4t} \geq 0$$

$$\text{ssi } 16e^{-4t} \geq 12e^{-3t}$$

$$\text{ssi } 4 \geq 3e^t$$

$$\text{ssi } \frac{4}{3} \geq e^t \text{ c'est-à-dire } t \leq \ln \frac{4}{3}$$

$$\left[ \frac{4}{3} = 1,33... \quad \ln \frac{4}{3} \approx 0,3... \right]$$

$x$	$-\infty$	$\ln(4/3)$	$+\infty$
$y'(t)$	+	0	-
$y(t)$	?		?

Finir  
l'exercice

+ graphique.