MAT1
Gr 16

TD du vendredi 13 novembre 2020

Programme d'aujourd'hui :
- retour sur le C.C
- feuille n°9 (fin)
- feuille n°10

Feuille no 9

On rappelle maintenant que les solutions de l'équation différentielle $f'(x)+a(x)f(x)=0$ sont exactement toutes les fonctions $f(x)=ce^{-A(x)}$ où A est une primitive de la fonction a et où $c\in\mathbb{R}$.

Exercice 2. Donner toutes les solutions des équations différentielles :

1. $f'(x)+f(x)=0$, $f'(x)-f(x)=0$
2. $f'(x)+3f(x)=0$, $f'(x)+xf(x)=0$
3. $f'(x)-\frac{2x}{1+x^2}f(x)=0$, $f'(x)-\sin(x)f(x)=0$

) fait

Explication du rappel : si on pose $g(x)=\underbrace{e^{A(x)}}_{u(x)}\underbrace{f(x)}_{v(x)}$ où A est une primitive de a. Alors :

$$g'(x)=\underset{u'(x)}{A'(x)e^{A(x)}}\underset{v(x)}{f(x)}+\underset{u(x)}{e^{A(x)}}\underset{v'(x)}{f'(x)}$$

$$=e^{A(x)}\underbrace{\left(a(x)f(x)+f'(x)\right)}_{=0} \quad \text{car } A'=a$$

donc $g(x)=c$ constante, et $f(x)=ce^{-A(x)}$ $(c\in\mathbb{R})$.

3. $f'(x)-\frac{2x}{1+x^2}f(x)=0$.

Pour résoudre, poser $a(x)=\frac{-2x}{1+x^2}$

et calculer une primitive $A(x)=-\ln(1+x^2)$

Donc les solutions de l'équa. diff

sont $f(x) = c\, e^{\ln(1+x^2)}$ $(c \in \mathbb{R})$

$= c(1+x^2) = c + cx^2$

Vérif : si $f(x) = c(1+x^2)$, $f'(x) = 2cx$

et $\frac{-2x}{1+x^2} f(x) = \frac{-2x}{1+x^2} \times c(1+x^2) = -2cx$

donc $f'(x) - \frac{2x}{1+x^2} f(x) = 0$ OK

Puis :

$f'(x) - \sin x\, f(x) = 0$

$a(x) = -\sin x \qquad A(x) = \cos x$

Les solutions sont $f(x) = c\, e^{-\cos x}$, $c \in \mathbb{R}$

(ça ne se simplifie pas !)

On rappelle que les solutions de l'équation différentielle $f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$ sont exactement toutes les fonctions $f(x) = ce^{-A(x)} + f_0(x)$ où A est une primitive de la fonction a, où $c \in \mathbb{R}$ et où f_0 est une solution particulière de $f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$.

Exercice 3.

1. Chercher une solution particulière de l'équation différentielle $f'(x) - f(x) = x + 2$. On cherchera une telle solution sous la forme $f_0(x) = \alpha x + \beta$ (méthode polynomiale).
2. Donner toutes les solutions de l'équation différentielle $f'(x) - f(x) = x + 2$.
3. Donner l'unique solution qui vérifie $f(0) = -4$. Idem avec les conditions $f(0) = 0$ et $f(0) = -3$.
4. Tracer ces 3 fonctions dans un même repère.

1. On pose $f_0(x) = \alpha x + \beta$; alors $f_0'(x) = \alpha$. On veut :

$$f_0'(x) - f_0(x) = \alpha - (\alpha x + \beta) = x + 2.$$

Ceci s'écrit $-\alpha x + \alpha - \beta = x + 2$.

Par identification : $\begin{cases} -\alpha = 1 & \text{(coef de } x\text{)} \\ \underline{\alpha - \beta = 2} & \text{(coef constant)} \end{cases}$

donc $\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = \alpha - 2 = -1-2 = -3 \end{cases}$ $\underline{f_0(x) = -x-3}$

2. Les sol. sont $f(x) = ce^{-A(x)} + f_0(x)$,

$a(x) = -1$ $\quad A(x) = -x$

$$f(x) = \underline{ce^{x} + (-x-3)}, \quad c \in \mathbb{R}$$

3. La sol. telle que $f(0) = -4$?

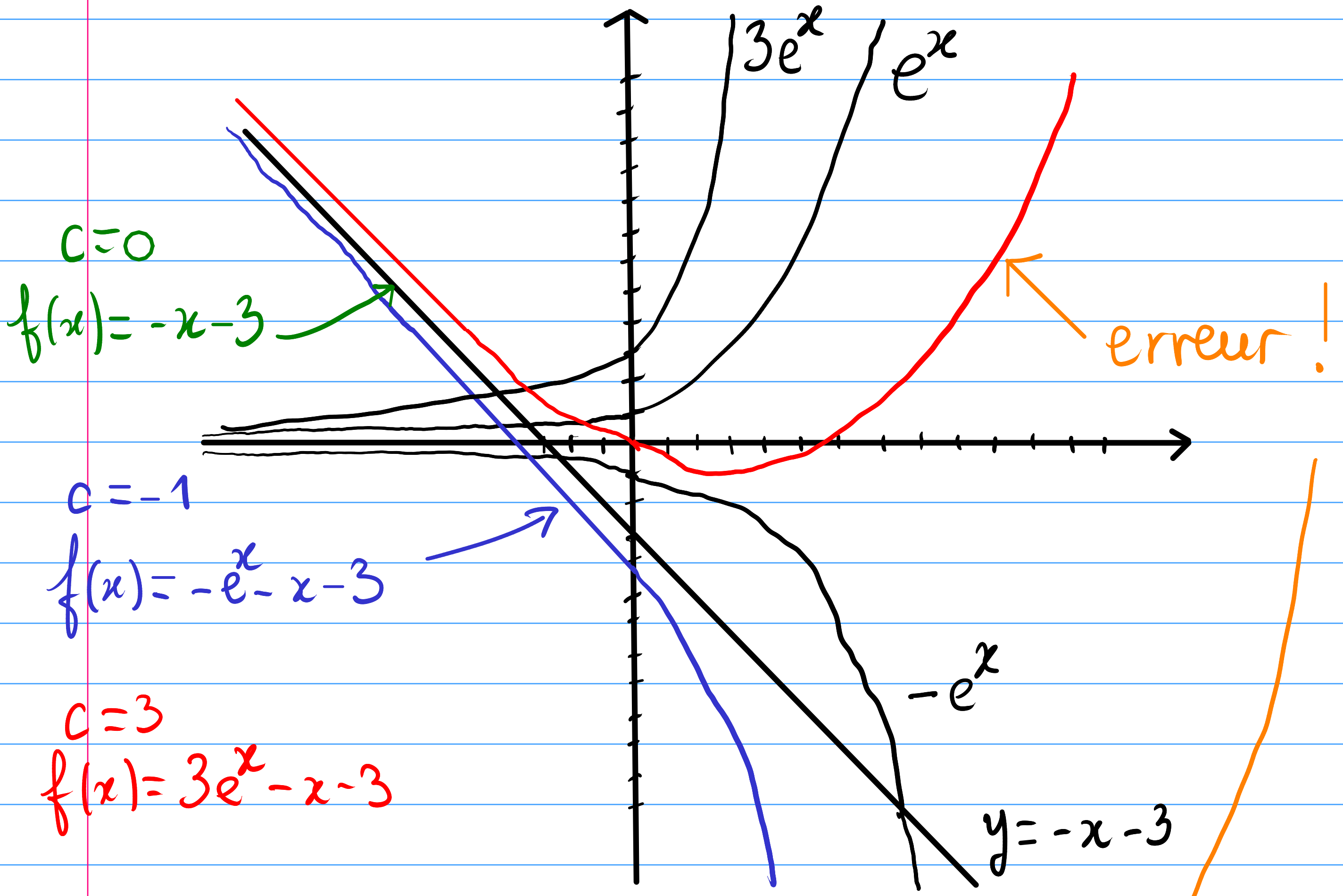
$f(0) = 0$?

$f(0) = -3$?

$$f(0) = c - 3 = \begin{cases} -4 & \text{ssi } c = -1 \\ 0 & \text{ssi } c = 3 \\ -3 & \text{ssi } c = 0 \end{cases}$$

Représentation graphique des fonctions

$f(x) = \underbrace{c\,e^{x}} - x - 3$ lorsque $c = -1, 3, 0$



La fonction rouge est d'abord décroissante ; elle commence à croître AVANT x=0 et non pas APRÈS comme je l'ai dessiné ci-dessus.

Feuille 10

Exercice 1. Corrigé du dernier exercice de la feuille 10.

Chercher une solution particulière des équations différentielles :

1. $f'(x) + 2f(x) = 1$,
2. $f'(x) + f(x) = x^2 - x$.

1. Méthode 1 : on cherche une sol. de la forme

$f_0(x) = \alpha x + \beta$. Donc $f_0'(x) = \alpha$

$f_0'(x) + 2f_0(x) = \alpha + 2(\alpha x + \beta) = 1$

$\iff \begin{cases} 2\alpha = 0 \\ \alpha + 2\beta = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$

Méthode 2 : idée : si $f_0(x) =$ constante $= c$

alors $f_0'(x) = 0$

dans ce cas, $\underbrace{f_0'(x)}_{=0} + 2f_0(x) = 2c = 1$ donc $c = \frac{1}{2}$

2. $f'(x) + f(x) = x^2 - x$ sol. particulière ?

Essayer avec $f(x)$ de quelle forme ?

Si on essaie $f(x) = \alpha x + \beta$?

$f'(x) = \alpha$ On ne peut pas avoir

$\underbrace{f'(x) + f(x)}_{\text{degré} \leq 1} = x^2 - x$!

Si on essaie $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

$$f'(x) = 2\alpha x + \beta$$

donc $f'(x) + f(x) = (2\alpha x + \beta) + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$

$$= \alpha x^2 + (2\alpha + \beta) x + \beta + \gamma$$

C'est égal à $x^2 - x$ ssi $\begin{cases} \alpha = 1 & \text{(coef de } x^2) \\ 2\alpha + \beta = -1 & \text{(coef de } x) \\ \beta + \gamma = 0 & \text{(coef constant)} \end{cases}$

On trouve $\begin{cases} \alpha = 1 & \\ 2 + \beta = -1 & \beta = -3 \\ -3 + \gamma = 0 & \gamma = 3 \end{cases}$

On a trouvé la sol. particulière

$$f_0(x) = x^2 - 3x + 3$$