MAT1
Gr 16

TD du mercredi 9 décembre 2020

Sujet d'examen de décembre 2019, suite

Exercice 3. Calculer les dérivées partielles (par rapport à x et par rapport à y) des fonctions

12 min

$$f(x,y) = e^{-2y}\sin(3x) \quad , \quad g(x,y) = \ln(x^2 + ye^x).$$

$$f(x,y) = e^{-2y}\sin(3x)$$

Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, la dérivée partielle par rapport à x, on considère y comme une constante.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \underbrace{e^{-2y}}_{\text{"constante"}} \times (3\cos 3x) = 3e^{-2y}\cos 3x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin(3x) \times (-2e^{-2y}) = -2e^{-2y}\sin 3x$$

$$g(x,y) = \ln(\underbrace{x^2 + ye^x}_{u(y)}) \qquad u'(y) = e^x$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{2x + y\cancel{x}e^x}{x^2 + ye^x}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{e^x}{x^2 + ye^x}$$

Exercice 4.

a) Donner une primitive de la fonction h définie par $h(x) = x \ln x$ (intégration par parties). Calculer $\int_1^2 h(x)dx$.

b) Trouver les réels a et b tels que la fonction k définie par

$$k(x) = \frac{x^3}{x^2+1} \qquad \text{vérifie} \qquad k(x) = ax + \frac{bx}{x^2+1}.$$

Donner une primitive de la fonction k. Calculer $\int_0^1 k(x)dx$.

30 min

a) $\displaystyle\int_1^t x \ln x \, dx$

$\begin{cases} u = \ln x \\ v' = x \end{cases}$

$\begin{cases} u' = 1/x \\ v = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^t - \int_1^t \frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{x} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^t - \int_1^t \frac{1}{2} x dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^t - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^t = \Big[\overbrace{\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2}^{F(x)}\Big]_1^t$$

donc $\displaystyle\int_1^2 x \ln x \, dx = F(2) - F(1)$

$$= (2\ln 2 - 1) - \left(-\frac{1}{4}\right) = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

b) ? a et b tels que

$$\frac{x^3}{x^2+1} = ax + \frac{bx}{x^2+1}.$$

On calcule :

$$ax + \frac{bx}{x^2+1} = \frac{ax(x^2+1)+bx}{x^2+1} = \frac{ax^3+(a+b)x}{x^2+1}$$

Ceci est égal à $\frac{x^3}{x^2+1}$ ssi $ax^3+(a+b)x = x^3$

Par identification : $\begin{cases} a=1 \\ a+b=0 \end{cases}$ càd $\begin{cases} a=1 \\ b=-a=-1 \end{cases}$

On obtient $k(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$ $= x^3 \times \frac{1}{x^2+1}$ $= x - \frac{x}{x^2+1}$

$$\leadsto \int_1^t k(x)\,dx = \int_1^t \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right) dx$$

$\frac{u'}{u} \times \frac{1}{2}$ (mais $\frac{1}{2}$ ne pose pas de problème)

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_1^t$$

vérif : dérivée de $\ln(x^2+1)$: $\frac{2x}{x^2+1}$ ça marche

On en déduit

$$\int_0^1 k(x)\,dx = \Big[\overbrace{\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1)}^{F}\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\big(1 - \ln 2\big) - \big(0 - \underbrace{\cancel{\ln 1}}_{=0}\big)\Big) = \frac{1 - \ln 2}{2}$$

Exercice 5.

a) Donner toutes les solutions de l'équation différentielle $f'(x) + f(x) = -x + 1$. Quelle est l'unique solution qui vérifie $f(0) = 0$?

b) Donner toutes les solutions de l'équation différentielle

$$f'(x) + \frac{2x}{1+x^2} f(x) = 2x.$$

On pourra utiliser la méthode de la variation de la constante. Au cours du calcul il faudra au fur et à mesure simplifier les fonctions obtenues (comme par exemple à l'Exercice 1). Quelle est l'unique solution qui vérifie $f(0) = \frac{3}{2}$?

30 min

a) Méthode : 1 Trouver une solution particulière f_0

2 Lui ajouter la solution générale de l'« équation sans second membre »

Pour 1 : variation de la constante
ou
méthode polynomiale

$$\boxed{f'(x) + f(x) = -x + 1.}$$

Var. de la constante : on part de la solution générale de l'éq. sans second membre :

$$c\, e^{-x} \quad (c \in \mathbb{R})$$

et on fait « varier c », c'est-à-dire on cherche $f_0(x) = c(x)\, e^{-x}$

$$f_0'(x) = c'(x)e^{-x} - c(x)e^{-x}$$

$$f_0'(x) + f_0(x) = c'(x)e^{-x} = -x+1$$

$$\Rightarrow \quad \underline{c'(x) = (-x+1)\,e^{x}}$$

il reste à trouver une prim. de ça.

Pour cela le mieux c'est : iPP

Méth polynomiale

On cherche $f_0(x) = ax+b$

$$f_0'(x) = a$$

$$f_0'(x) + f_0(x) = a + ax + b = -x + 1$$

Par identification : $\begin{cases} a = -1 \\ a+b = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad f_0(x) = -x+2$ est solution.

Les solutions de l'équation sont

$$\boxed{f(x) = \underbrace{c\,e^{-x}}_{\text{sol. générale de l'éq. sans second membre}} + \underbrace{(-x+2)}_{\text{une solution particulière } f_0} \quad , c \in \mathbb{R}}$$

Exercice 6. On étudie la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}(1+x^2)$. On notera $\alpha = \sqrt{\sqrt{2}-1}$, et on fera les approximations $\alpha \simeq 0,6$ et $\sqrt{2} \simeq 1,4$.

a) Vérifier que g est paire. Ainsi, il suffit d'étudier g sur $\mathbb{R}^+$ (questions b) et c) suivantes).

b) Étudier le signe de $\boxed{h(x) = 1 - \frac{2}{(1+x^2)^2}}$ sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que $g'(x) = xh(x)$.

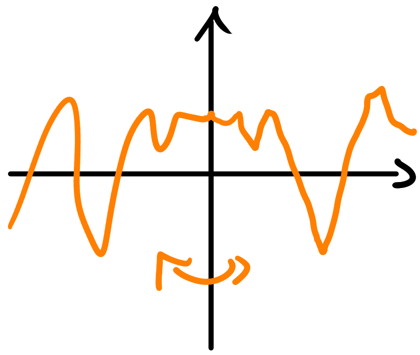
c) Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}^+$ et calculer la limite de g en $+\infty$.

d) Tracer le graphe de g pour $x \in \mathbb{R}$. On choisira une échelle appropriée pour que le dessin soit lisible, et on situera ce graphe par rapport à celui de la parabole d'équation $y = \frac{1}{2}(x^2+1)$ (tracée dans le même repère). On indiquera les tangentes horizontales.

24 min

a) On a : $g(-x) = \frac{1}{1+(-x)^2} + \frac{1}{2}\left(1+(-x)^2\right) = g(x)$

donc g est paire.



b) $g(x) = \frac{1}{\underbrace{1+x^2}} + \frac{1}{2}(1+x^2)$

$1/u$

$$g'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}x = \frac{-2x + x(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2}$$

$$= x \times \frac{-2+(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2} = x \times \Big[\underbrace{1 - \frac{2}{(1+x^2)^2}}_{h(x)}\Big]$$

$$= x\,h(x)$$

comme annoncé dans la question.

Pour trouver le signe de $h(x)$, on résout :

$h(x) \geqslant 0 \iff 1 - \dfrac{2}{(1+x^2)^2} \geqslant 0$

(avec $x \in \mathbb{R}^+$)

$\iff 1 \geqslant \dfrac{2}{(1+x^2)^2}$

$\iff (1+x^2)^2 \geqslant 2$ ($\geqslant 0$)

Si on développe avec l'identité rem. on a :

x^4+2x^2+1

c'est plus compliqué pour la suite !

$\iff \underbrace{1+x^2}_{\geqslant 0} \geqslant \sqrt{2}$ donc on ne considère pas $-\sqrt{2}$

$\iff x^2 \geqslant \sqrt{2}-1$

$\iff x \geqslant \underbrace{\sqrt{\sqrt{2}-1}}_{\alpha}$

(on résout pour $x \in \mathbb{R}^+$ donc on ne prend que la $\sqrt{\ }$ positive !)

x	0		α		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	

c)

d)

à finir de votre côté !

Solution vendredi