MAT1
Groupe 16

TD du mercredi 4 novembre 2020

programme : feuilles 8 et 9.

Feuille 8

Exercice 1. Corrigé du VRAI / FAUX :

1. La fonction $F(x) = \frac{1}{2}x^2e^x$ est une primitive de $f(x) = xe^x$.
2. La fonction $G(x) = \frac{1}{x}$ est une primitive de $g(x) = \ln x$.
3. La fonction $H(x) = x^4 \sin x$ est une primitive de $h(x) = 4x^3 \cos x$.
4. La fonction $K(x) = \arctan x$ est une primitive de $k(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

1. Faux : la dérivée de $F(x) = \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{u(x)}\underbrace{e^x}_{v(x)}$ est :

$$F'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$
$$= x e^x + \frac{1}{2}x^2 e^x \neq f(x)$$

2. Faux : $G'(x) = \frac{-1}{x^2} \neq g(x)$

3. Faux : la dérivée de $H(x) = \overbrace{x^4}^{u(x)}\overbrace{\sin x}^{v(x)}$

est $H'(x) = 4x^3 \sin x + x^4 \cos x \neq h(x)$

4. Vrai : $K'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ À CONNAITRE !!

Exercice 2.

1. Donner une primitive de $f(x) = x\cos x$ et calculer $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$.
2. Donner une primitive de $f(x) = x\ln x$ et calculer $\int_1^{10} f(x)\,dx$.

RAPPEL :

On rappelle la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^{2\pi} u(x)v'(x)dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} u'(x)v(x)dx,$$

En particulier, le membre de droite est une primitive de la fonction uv'.

1. Posons $u(x) = x \qquad u'(x) = 1$
$v'(x) = \cos x \qquad v(x) = \sin x$

$$\int f(x)dx = x\sin x - \int 1 \times \sin x\,dx \qquad (\text{IPP})$$
$$= x\sin x + \cos x$$

donc
$$\int_0^{2\pi} x\cos x\,dx = \Big[x\sin x + \cos x\Big]_0^{2\pi}$$
$$= (\cancel{2\pi \sin(2\pi)} + \underbrace{\cos 2\pi}_{=1}) - (0\sin 0 + \underbrace{\cos 0}_{=1})$$
$$= 1 - 1 = 0.$$

2. Calc. $\int_1^{10} x\ln(x)\,dx \qquad f(x) = x\,\overbrace{\ln(x)}^{u(x)}$

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = x \end{cases} \qquad u'(x) = \frac{1}{x} \quad v(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$\int_1^{10} x\ln x\,dx = \Big[\ln(x) \times \frac{1}{2}x^2\Big]_1^{10} - \int_1^{10} \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}x^2\,dx$$

$$\int_1^{10} x \ln x \, dx = \left[\ln x \times \frac{1}{2}x^2\right]_1^{10} - \int_1^{10} \overbrace{\underbrace{\frac{1}{x} \times \frac{1}{2}x^2}_{\text{simple!}}}^{\frac{1}{2}x} dx$$

$$= \left[\ln x \times \frac{1}{2}x^2\right]_1^{10} - \left[\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}x^2\right]_1^{10}$$

$$= \left[\ln 10 \times \frac{1}{2}10^2 - \cancel{\ln 1} \times \frac{1}{2}\right] - \left[\frac{1}{4}(10^2 - 1^2)\right]$$

$$= 50 \ln 10 - \frac{1}{4} \times 99$$

Attention, il y a une erreur
dans le corrigé présent sur Moodle

Exercice 3. On veut calculer $\int_0^1 \arctan x\, dx$.

1. En effectuant une intégration par parties, montrer que

$u(x)v'(x)$

$$\int_0^1 \arctan x\, dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$$

2. Calculer $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$ en utilisant une reconnaissance de primitives.

3. Donner enfin la valeur de $\int_0^1 \arctan x\, dx$.

1. Posons $u(x) = \arctan x \qquad u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$v'(x) = 1 \qquad v(x) = x$

IPP s'applique :

$$\int_0^1 \arctan x\, dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)dx$$

$$= [\arctan x \times x]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \times x\, dx$$

2. $= \frac{x}{1+x^2}$ presque $\frac{u'}{u}$!!

$$= [\arctan x \times x]_0^1 - \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1$$

3. Vérif : $g(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

$g'(x) = \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}$ OK

$$= [1 \times \underbrace{\arctan 1}_{\pi/4} - 0 \times \underbrace{\arctan 0}_{=0}] - \frac{1}{2}[\ln(1+1^2) - \ln(1+0^2)]$$

$$= \left[\frac{\pi}{4} - 0\right] - \frac{1}{2}[\ln 2 - \cancel{\ln 1}] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

Feuille 9

Exercice 1. Corrigé.

1. Trouver a et b tels que $\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$.

2. En déduire une primitive de la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ sur $]-1,1[$.

3. Calculer $\int_0^{1/2} \frac{1}{1-x^2} dx$.

$1-x>0$ et $1+x>0$

1. $$\frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} = \frac{a(1+x)+b(1-x)}{1-x^2} = \frac{(a-b)x + a+b}{1-x^2}$$

Ce truc est $= \frac{1}{1-x^2}$ si et seulement si

$$\begin{cases} a-b=0 \\ a+b=1 \end{cases}$$

Résolution :

$a=b$

$2a=1$ donc $a=\frac{1}{2}=b$

2. $$f(x) = \frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x}$$

Or : $\int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(\underbrace{1-x}_{>0})$

$\int \frac{1}{1+x} dx = \ln(\underbrace{1+x}_{>0})$

donc $\int f(x) dx = -\frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(1+x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$

est une primitive de $f(x)$.

3. On déduit $\int_0^{1/2} \frac{1}{1-x^2} dx = \left[\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right]_0^{1/2}$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{3/2}{1/2} - \cancel{\ln\frac{1+0}{1-0}}\right) = \frac{1}{2}\ln 3$$

On rappelle maintenant que les solutions de l'équation différentielle $f'(x)+a(x)f(x)=0$ sont exactement toutes les fonctions $f(x)=ce^{-A(x)}$ où A est une primitive de la fonction a et où $c\in\mathbb{R}$.

Exercice 2. Donner toutes les solutions des équations différentielles :

1. $f'(x)+f(x)=0$, $f'(x)-f(x)=0$
2. $f'(x)+3f(x)=0$, $f'(x)+xf(x)=0$
3. $f'(x)-\frac{2x}{1+x^2}f(x)=0$, $f'(x)-\sin(x)f(x)=0$

1. Pour le 2ème : on prend $a(x)=1$

$f(x)=f'(x)$ dont les sol. sont $f(x)=c\,e^{x}$

vérif : si $f(x)=c.\,e^{x}$

$f'(x)=c.\,e^{x}=f(x)$ ok !

Pour le 1er : $a(x)=-1$ (Roland ?)

$f(x)=-f'(x)$: les sol sont $f(x)=c\,e^{-x}$ $(c\in\mathbb{R})$

2. $f'(x)+3f(x)=0$ (merci Roland).

On prend $a(x)=3$ $A(x)=3x$

$\Rightarrow$ les sol. sont de la forme $f(x)=c\,e^{-3x}$ $(c\in\mathbb{R})$

Pour $f'(x)+x\,f(x)=0$ on prend $a(x)=x$

$A(x)=\frac{1}{2}x^2$

$\Rightarrow$ les sol. sont les fonctions $f(x)=c\,e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $c\in\mathbb{R}$