MAT1
Gr 16

# TD du mercredi 25 novembre 2020

**Exercice 1.** On étudie la fonction

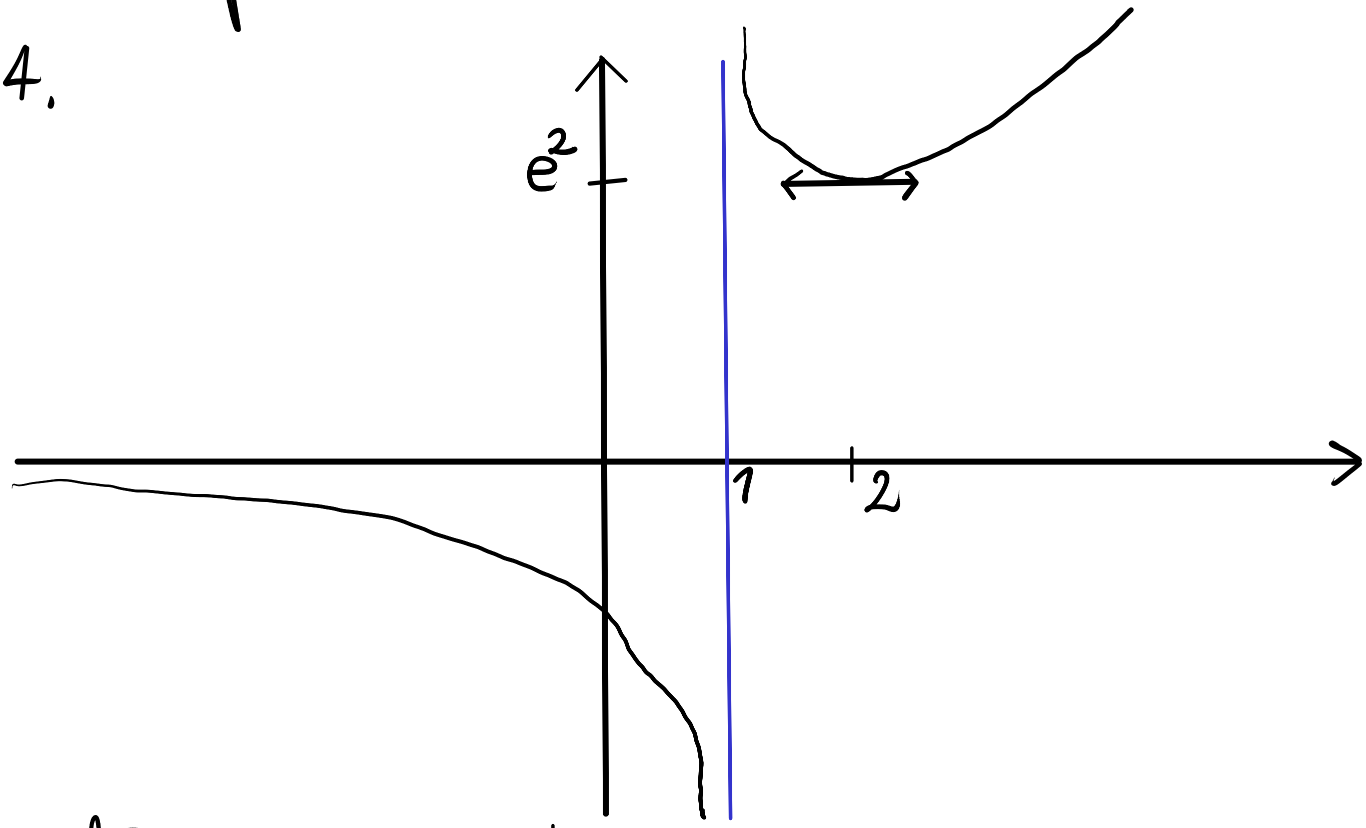
$$f(x) = \frac{e^x}{x-1}.$$

1. Donner le domaine de définition de $f$.
2. Donner les limites de $f$ lorsque $x$ tend vers $1^-$, vers $1^+$ et vers $+\infty$.
3. Calculer la dérivée de $f$, étudier son signe, et établir le tableau de variations de $f$.
4. Tracer le graphe de $f$. On dessinera les tangentes horizontales à ce graphe.

1. La fonction est bien définie tant que le denominateur ne s'annule pas donc son dom. de définition est $D_f = ]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$.

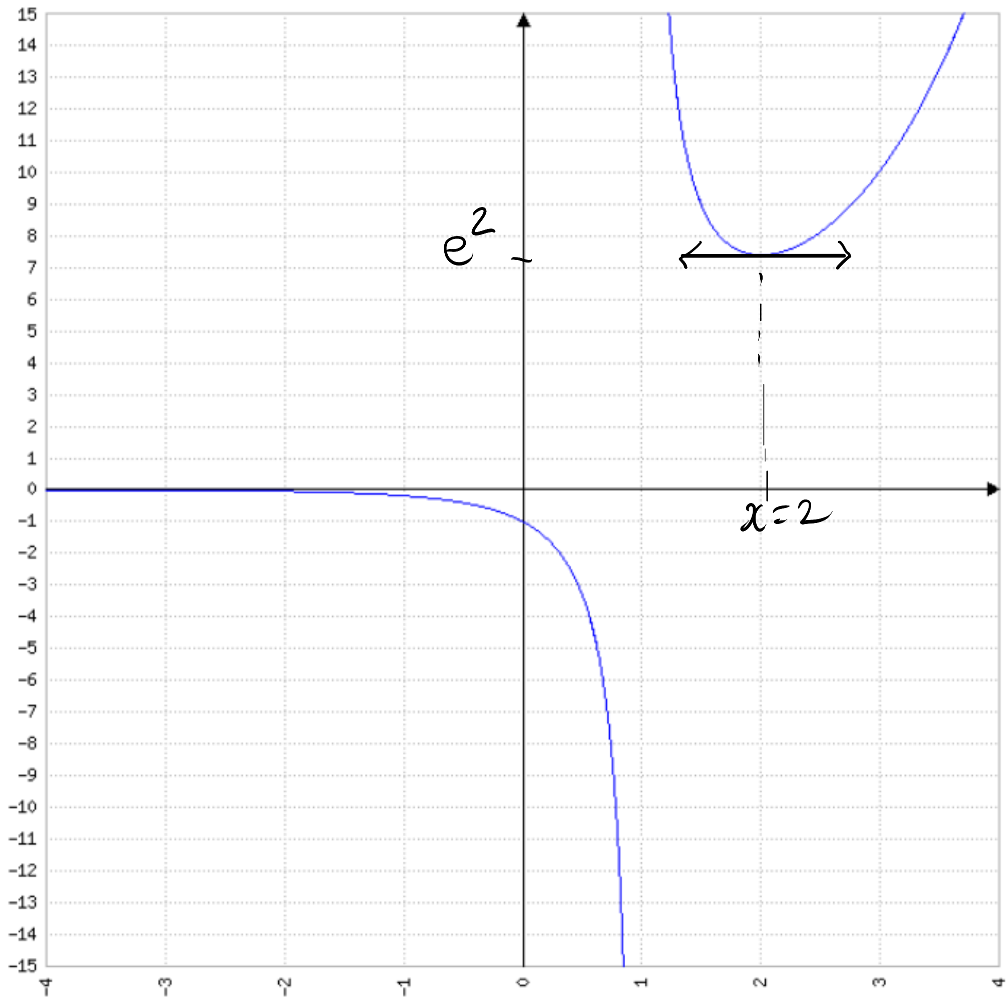
2.3. Cf Youna et Jade.

4.




$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{0^+}{-\infty} = 0^-$$

Le même tracé, fait par Dame Calculette :



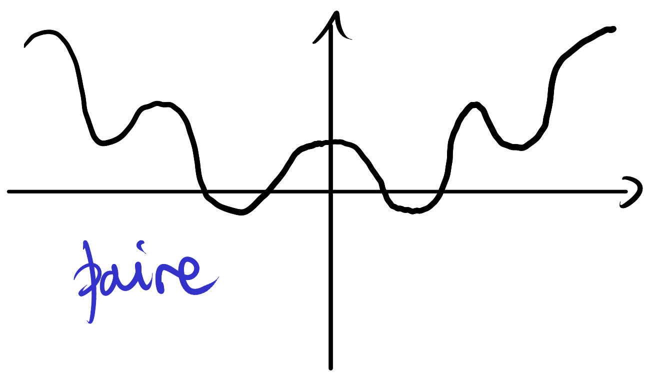
**Exercice 2.** On étudie la fonction

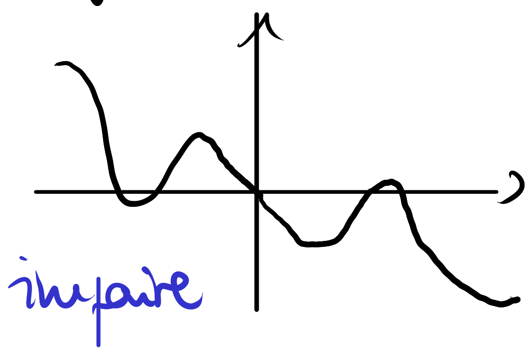
$$f(x) = \sqrt{4x^2+1}.$$

1. Donner le domaine de définition de $f$.
2. Montrer que $f$ est paire, c'est à dire $f(-x) = f(x)$. Peut-on réduire le domaine d'étude de $f$ ?
3. Calculer la dérivée de $f$ et donner le tableau de variation de $f$ sur $\mathbb{R}^+$.

1\. Comme $4x^2+1 \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction est définie partout : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

2\. Rem: fonction impaire : $f(-x) =$



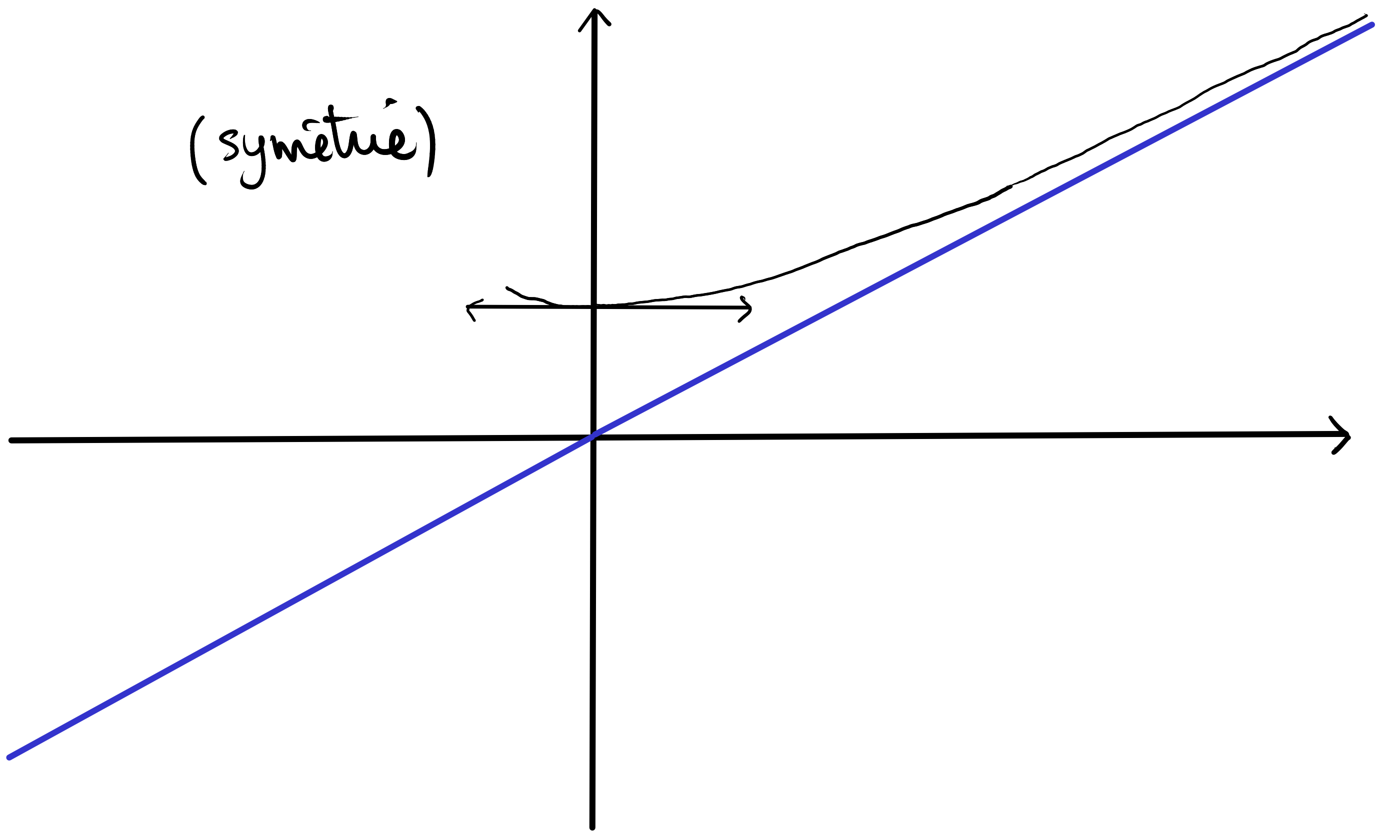




La fonction $f$ est paire car

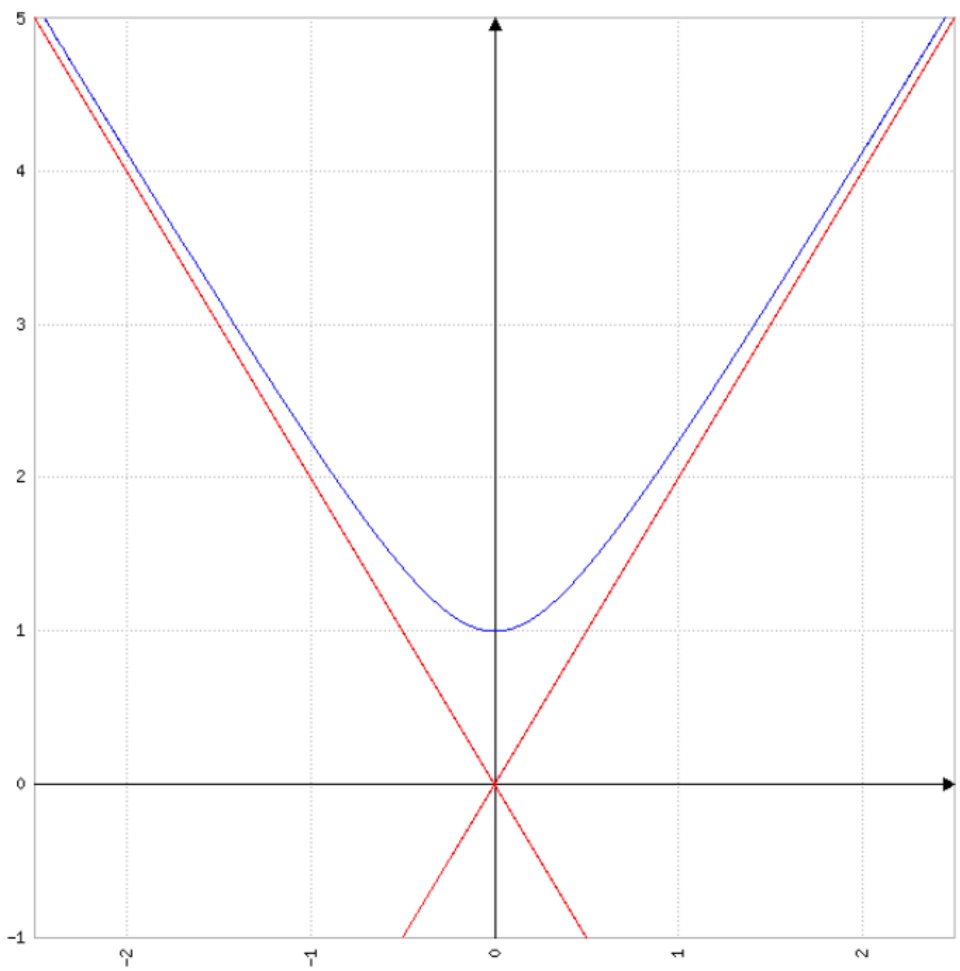
$$f(-x) = \sqrt{4(-x)^2+1} = \sqrt{4x^2+1} = f(x).$$

Cela permet de limiter l'étude de $f$ à $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$. On fait ensuite une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées pour avoir l'étude de $f$ sur $\mathbb{R}$ entier.

3\. Dérivée et tableau de variations.




À la calculette :



Nous allons montrer que la droite d'équation $g(x) = 2x$ est asymptote au graphe de $f$ en $+\infty$, et donner la position du graphe par rapport à cette asymptote.

4. Montrer que $f(x) = g(x)\sqrt{1 + \frac{1}{4x^2}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Montrer que $\sqrt{1 + \frac{1}{4x^2}} > 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

6. Déduire des 2 questions précécentes que $f(x) - g(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $x > 0$ donc $\sqrt{x^2} = x$,

on en déduit :

$$f(x) = \sqrt{4x^2+1} = \sqrt{4x^2\left(1+\frac{1}{4x^2}\right)} = \sqrt{4x^2}\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}$$

$$= 2x\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}} = g(x)\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}.$$

5. Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\frac{1}{4x^2} > 0$

donc $1 + \frac{1}{4x^2} > 1$

donc $\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}} > \sqrt{1} = 1$

(la fonction $\sqrt{.}$ est croissante !)

6. On vient de montrer que $\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}} > 1$,

comme $g(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$

en multipliant par $g(x)$ on déduit

$$f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{question 4}}}{=} g(x)\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}} > g(x)$$

(sinon l'inégalité change de sens !)

donc $f(x) - g(x) > 0$.

7. Montrer maintenant que $\boxed{f(x) - g(x) \text{ tend vers } 0 \text{ lorsque } x \text{ tend vers } +\infty}$ (utiliser la question 4 et la formule $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$).

8. Tracer les graphes de $f$ et de $g$ dans un même repère.

On dessinera les tangentes horizontales au graphe de $f$.

Propriété de l'asymptote

7. Identité rem. : $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = \sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2$
$= a - b$
lorsque $a, b \geq 0$

On a :

$$f(x) - g(x) = \overset{2x}{g(x)}\overset{+\infty}{\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}} - \overset{+\infty}{\overset{2x}{g(x)}}$$ d'après q.4.

$\boxed{\text{En } +\infty : \text{ F.i. } \infty - \infty}$

$$= g(x)\Big(\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}}_{a} - \underbrace{\sqrt{1}}_{b}\Big)$$

$$= g(x)\,\frac{\left(1+\frac{1}{4x^2}\right)-1}{\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}+1} = 2x\,\frac{\frac{1}{4x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}+1}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2x}}_{\to 0^+} \times \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}+1}}_{\to 1/2}$$

lorsque $x \to +\infty$

« $0^+ \times \frac{1}{2}$ » n'est pas une F.i., la limite lorsque $x \longrightarrow +\infty$ est $0^+$.

Récapitulatif des F.I. :

1) $\infty - \infty$

2) $\dfrac{\infty}{\infty}$

3) $\dfrac{0}{0}$

4) $\infty \times 0$

8. Pour le graphique, voir 3 pages avant.